Moti relativi

Le caratteristiche del moto di un corpo sono legate al sistema di riferimento scelto. Si può utilizzare un sistema fisso solidale con un corpo. Si scelga un sistema di assi cartesiani $O(x, y, z)$. ~~Un~~ Tale sistema fissa uno spazio in cui la distanza tra due punti geometrici rimane invariata. Nasce a volte l'esigenza di mettere in relazione moti simultanei di un punto materiale rispetto a due sistemi di riferimento diversi. Il moto viene studiato in entrambi.

I moti risultano diversi, ma si trova una relazione tra i caratteri cinematici di entrambi ed il <u>moto di trascinamento</u>, che i punti solidali con una terna hanno rispetto all'altra.

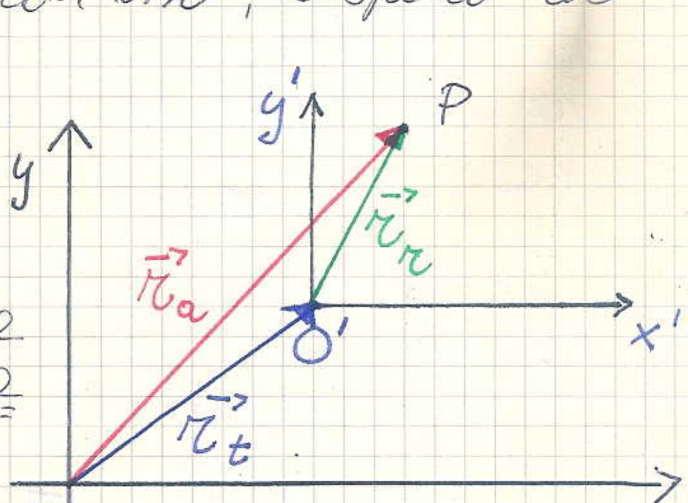
Uno dei due sistemi (non importa quale = relativismo!) sarà indicato come <u>fisso</u>, il moto rispetto ad esso sarà detto <u>assoluto</u>.

L'altro sistema si chiamerà <u>mobile</u> ed il moto in esso si dirà <u>relativo</u>.

Si indicherà come <u>moto di trascinamento</u>, il moto rigido con la terna mobile $O'(x', y', z')$ di tutti i punti solidali con esso, rispetto al sistema $O(x, y, z)$.

Iniziamo, passo passo, per semplicità grafica!

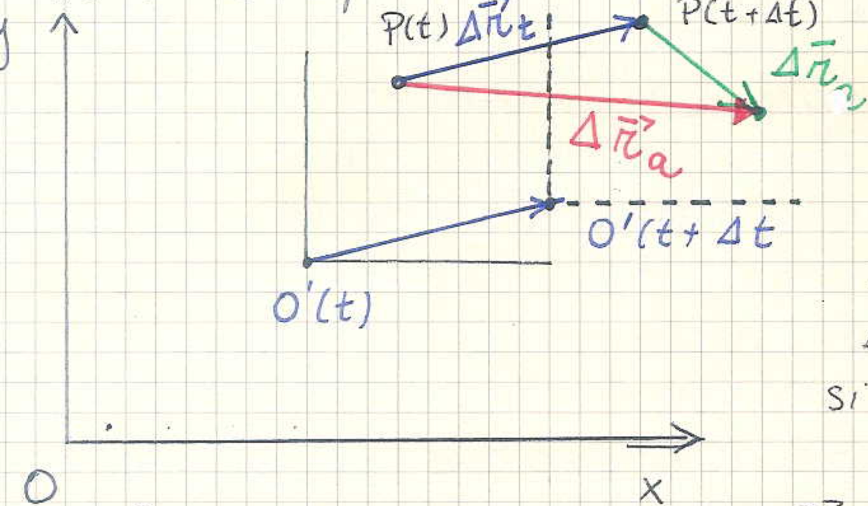
Supponiamo che il moto di $O'(x', y', z')$ della terna mobile sia di sola traslazione, la terna non ruota quindi le direzioni di $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ e $\hat{k}'$ non cambiano nel tempo.



Si può comporre il vettore posizione di P rispetto a O(x,y,z) come somma del vettore posizione dell'origine della Terna mobile più il vettore posizione relativo ad O'(x',y',z')

$$\vec{r}_a = \vec{r}_t + \vec{r}_r$$

Nella cinematica siamo interessati alle variazioni di posizione nel tempo.



Si ottiene

$$\Delta\vec{r}_a = \Delta\vec{r}_t + \Delta\vec{r}_r$$

lim degli spostamenti
Δt->0

si ottiene $\vec{v}_a = \vec{v}_t + \vec{v}_r$ (1t)

La velocità assoluta ($\vec{v}_a$) è data dalla composizione (somma vettoriale) della velocità di trascinamento per traslazione (in questo caso particolare) e la velocità relativa ($\vec{v}_r$) del punto materiale rispetto ad O'.
Se deriviamo rispetto al tempo una seconda volta si ha:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_r \qquad (2t)$$

Ricordiamo che per sistemi in moto relativo uniforme ($\vec{v}_t$ = costante) si ha

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r .$$

Tali sistemi sono detti inerziali e in cui vale la legge di Newton.
Se si applica una forza $\vec{F}$ si ottiene

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_a = m\,\vec{a}_r$$

Si ha la stessa accelerazione in entrambi i sistemi.

Invece nei sistemi non inerziali si avrebbe:

$$\vec{F} = m\vec{a}_a = m\vec{a}_t + m\vec{a}_r \qquad (3t)$$

L'accelerazione osservata in un sistema non inerziale (in questo caso $\mathbf{O}'$) è $\vec{a}_r$, ma risulta data dalla $\vec{F}$ reale applicata ed una Forza conseguenza dell'accelerazione di $\mathbf{O}'$ rispetto ad $\mathbf{O}$ detta forza Fittizia:

$$\vec{a}_r = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{a}_t$$

Per giustificare $\vec{a}_r$, devo assumere che sul corpo m (almeno per quanto riguarda le caratteristiche cinematiche del punto P rispetto ad $\mathbf{O}'$) agisca $\vec{F}$ ed una forza $\vec{F}_{Fitt} = -m\vec{a}_t$

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_r \equiv \vec{F} - m\vec{a}_t = m\vec{a}_r$$

In un sistema non inerziale valgono le leggi di Newton, se si includono le Forze Fittizie.

In un sistema non inerziale se non viene applicata alcuna forza si avverte comunque un'accelerazione $\vec{a}_r$ dovuta all'accelerazione di $\mathbf{O}'$ rispetto ad $\mathbf{O}$.

$$m\vec{a}_a = 0 = m\vec{a}_t + m\vec{a}_r.$$

$$\vec{a}_r = + \frac{\vec{F}_{Fitt}}{m}$$

dove $\vec{F}_{Fitt} = - m\vec{a}_t$

Il moto di Trascinamento in cui i punti, che definiscono lo spazio della terna mobile $O'(x',y',z')$, traslano soltanto viene chiamato moto di <u>trascinamento</u> per <u>traslazione</u>, utilizzando i seguenti pedici tt, pertanto riscriveremo le equazioni $(1t)$, $(2t)$ e $(3t)$ nei seguenti modo:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tt} + \vec{v}_r \qquad (1\,tt)$$

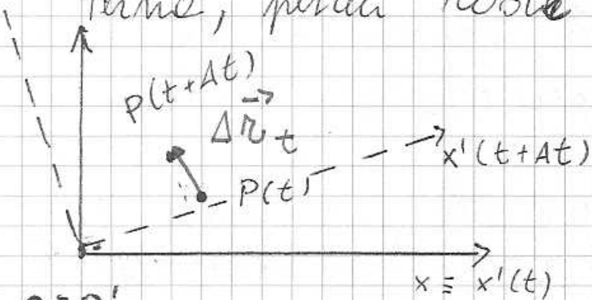
$$\vec{a}_a = \vec{a}_{tt} + \vec{a}_r \qquad (2\,tt)$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_a = m\,\vec{a}_{tt} + m\,\vec{a}_r \qquad (3\,tt)$$

dove, ribadiamo, i pedici tt indicano <u>trascinamento per traslazione</u>.

Moto di trascinamento per sola rotazione.

Nel moto di Trascinamento di sola rotazione la terna mobile ruota intorno all'origine O'. Supponiamo che un punto materiale sia vincolato a questa Terna, perciò ruota rispetto ad O ma sia fisso per O'.



Il moto del punto P rispetto ad O risulta un moto circolare, si potrebbe immediatamente dedurre da

$$\vec{r}_a = \vec{r}_t + \vec{r}_r \Rightarrow$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_t = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'$$

dove la posizione del punto P espressa rispetto ad O' è $\vec{r}\,' \equiv x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$.
È conveniente utilizzare il formalismo matematico per descrivere questa situazione semplice e, per avere una maggiore "libertà" di manovra, spesso utilizzeremo $\vec{r}\,' \equiv \vec{r}_r$. A seconda delle necessità useremo l'una o l'altra nota-

zione.

Nella derivazione formale useremo $\vec{r}'$ in quanto esplicitato rispetto ai versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$, ci permette di considerare le componenti (x', y', z') e i relativi versori rispetto ad O', che variano nel tempo in O.

Consideriamo il caso grafico solo rispetto a x e y:

$$\vec{r}_r = x'\hat{i}' + y'\hat{j}'$$

In questo caso $\vec{r}_a = \vec{r}_r$ in quanto $O' \equiv O$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right) =$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} \quad (*)$$

Nel caso in cui P non si muove rispetto ad O'

$\frac{dx'}{dt} = 0$ e $\frac{dy'}{dt} = 0$, si ha per *

$$\vec{v}_a = x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt}.$$

Dalla derivazione dei versori si ottiene $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \omega \wedge \hat{i}'$ quindi si ottiene

$$\vec{v}_a = x'(\vec{\omega} \wedge \hat{i}') + y'(\vec{\omega} \wedge \hat{j}') =$$

$$= \vec{\omega} \wedge x'\hat{i}' + \vec{\omega} \wedge y'\hat{j}' \Rightarrow$$

$$= \vec{\omega} \wedge (x'\hat{i}' + y'\hat{j}') = \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Dal sistema di riferimento fisso il corpo assume una velocità di trascinamento che chiameremo di rotazione ed indicheremo con il pedice tr

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tr} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \qquad (1\,tr)$$

Tale velocità dipende dalla posizione del punto rispetto ad O', ovvero da $\vec{r}'$.

Deriviamo ancora rispetto al tempo la (1tr)
si ottiene (6)

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

nel caso in cui $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ e in questo caso in cui il punto non varia la sua posizione rispetto ad O' si ha

$$\vec{a}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = -\omega^2 \vec{r}'$$

dove $-\omega^2 \vec{r}'$ è detta accelerazione di trascinamento per sola rotazione.

$$\vec{a}_{tr} = -\omega^2 \vec{r}'$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{tr}$$

Abbiamo visto che la descrizione di un punto vincolato alla Terna O' in rotazione, potrà essere descritto rispetto ad O assumendo la presenza (vincolo) di una Forza reale detta centripeta. O può essere descritto rispetto ad O' assumendo l'esistenza di una Forza ~~detta~~ Fittizia, detta centrifuga).

Infatti in O' P è fermo quindi

$$\vec{a}_r = 0 \qquad \Sigma F = 0$$

$$m\,\vec{a}_r = m\,\vec{a}_a - m\,\vec{a}_{tr}$$

Forza centripeta Forza centrifuga

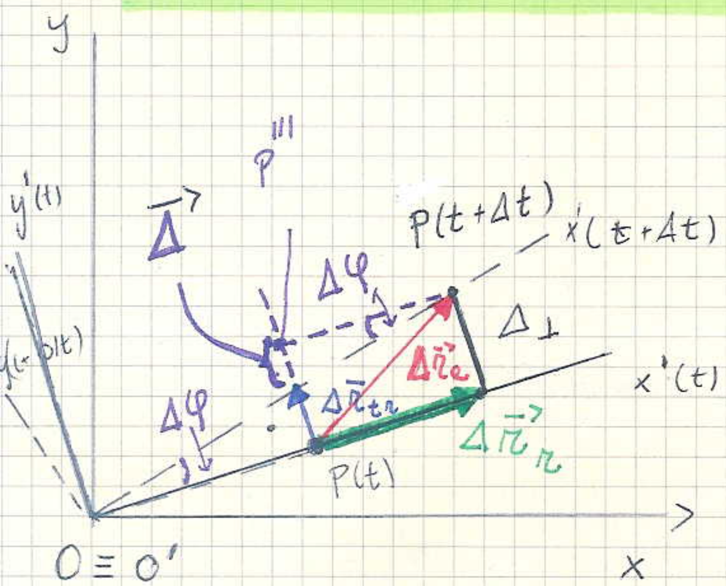
$$\vec{F}_{CF} = -m\,\vec{a}_{tr} = m\,\omega^2\,\vec{r}' =$$

Pura Traslazione e rotazione

Risulta immediato ottenere nel caso di un sistema mobile che Trasli e ruoti le seguenti equazioni

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tt} + \vec{v}_{tr} \qquad \vec{a}_a = \vec{a}_{tt} + \vec{a}_{tr}$$

Moto relativo per un sistema in rotazione



Supponiamo che oltre a trovarsi su un sistema O' in rotazione il punto materiale si muove rispetto ad O'.
Osserviamo che il punto P all'istante $t+\Delta t$ si troverà nella posizione indicata come $P(t+\Delta t)$.

Si osserva che la variazione della posizione (spostamento) rispetto ad O può essere composta dalla somma vettoriale

$$\Delta\vec{r}_a = \Delta\vec{r}_r + \overline{PP'''} \equiv$$

$$= \Delta\vec{r}_r + \Delta\vec{r}_t + \vec{\Delta}$$

(Nel grafico gli spostamenti sono amplificati, per $\Delta t \to 0$ $\Delta\vec{r}_{tr}$ e $\Delta_\perp$ possono considerarsi ortogonali a $\Delta\vec{r}_r$)

dove con $\vec{\Delta}$ abbiamo indicato il tratto che sommato a $\Delta\vec{r}_t$ ci permette di ottenere $\Delta\vec{r}_a$.
Si può osservare che il modulo di $\vec{\Delta}$ può essere ricavato da Δr_r e $\Delta\varphi$, ovvero:

$$|\vec{\Delta}| = \Delta r_r \tan(\Delta\varphi)$$

per $\Delta\varphi \to 0$ $\tan(\Delta\varphi) \simeq \Delta\varphi$, pertanto

$$|\vec{\Delta}| = \Delta r_r \, \Delta\varphi$$

per $\Delta t \to 0$ $\Delta r_r \to 0$ e $\Delta\varphi \to 0$ quindi $|\vec{\Delta}|$ è un infinitesimo di secondo grado, si ha

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta\vec{r}_r}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overrightarrow{PP'''}}{\Delta t}$$

$$\qquad = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}_t}{\Delta t}$$

← Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

Ricordiamo che siamo nel solo caso di trascinamento di sola rotazione pertanto

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_r \qquad (4)$$

dove $\vec{v}_{tr} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'$.

Osserviamo che il caso grafico può essere descritto formalmente nel seguente modo.

$$\vec{r}_a = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_r$$

dove risulta pratico utilizzare per $\vec{r}_r \equiv \vec{r}\,'$

$$\frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_r}{dt}$$

1° termine a 1° membro è $\vec{v}_a$,

1° termine a 2° membro $\vec{v}_{tt} = 0$, O' non trasla rispetto ad O, ma ruota soltanto.

Ricaviamo il 2° termine del 2° membro.

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) =$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \dots + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'\right) + \left(x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right) =$$

$$= \left(v_x'\hat{i} + \dots + v_z'\hat{k}'\right) + \left(x'\vec{\omega}\wedge\hat{i}' + \dots + z'\vec{\omega}\wedge\hat{k}'\right) =$$

$$= \left(\vec{v}\,'\right) + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$$

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' = \vec{v}_{tr}$ velocità di trascinamento di traslazione

$\vec{v}\,' \equiv \vec{v}_r$ velocità del punto P relativa al sistema $O'(x', y', k')$.

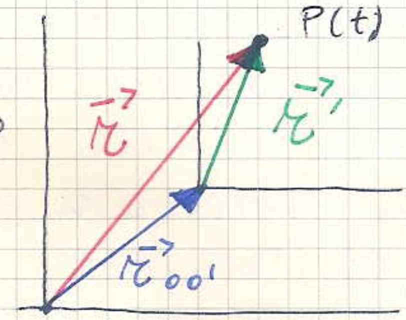
otteniamo quindi

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_r \qquad \text{la } (4).$$

Una volta verificata la "perfezione" formale risulterebbe complesso, almeno graficamente, continuare per la strada grafica. Invece è più lineare e "completo" ottenere la descrizione generale mediante il calcolo vettoriale.

Partiamo quindi dal vettore posizione

$$\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}\,'$$



per necessità descrittive abbiamo equivalentemente utilizzato

$$\vec{r}_a = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_r$$

ed abbiamo utilizzato i pedici a per assoluto, r per relativo, tt per trascinamento di sola traslazione e tr per trascinamento di sola rotazione.

La velocità è $d\vec{r}/dt$ per cui si ha

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \qquad (5)$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \equiv \vec{v}_a$ velocità assoluta

$\frac{d\vec{r}_{OO'}}{dt} = \vec{v}_{OO'} \equiv \vec{v}_{tt}$ velocità di trascinamento di sola traslazione

$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\hat{i}' + \dots + y'\hat{j}') = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,'$

come ricavato prima $\vec{v}\,' \equiv \vec{v}_r$ velocità relativa ad $O'(x', y', z')$

e $\vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' \equiv \vec{v}_{tr}$ velocità di trascinamento di sola rotazione

La (5) risulta allora:

$$\vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,' + \vec{v}\,' \qquad (6)$$

esplicitando il significato di ogni vettore velocità:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{tt} + \vec{v}_{tr} + \vec{v}_r \qquad (6')$$

La velocità assoluta del punto P rispetto ad O è data dalla composizione della velocità di trascinamento di traslazione, della velocità di trascinamento di rotazione e della velocità relativa al sistema $O'(x', y', z')$.

Ovviamente (6) e (6') sono la stessa equazione, nella 6' abbiamo solo esplicitato nei pedici il senso dei vettori di (6).

Deriviamo ulteriormente la (6) rispetto al tempo:

$$(7) \qquad \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d}{dt}(\vec{v}')$$

1° termine a 1° membro $\quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_a$

è l'accelerazione del punto P rispetto ad O detta anche assoluta.

1° in 2° membro $\frac{d\vec{v}_{oo}}{dt} = \vec{a}_{oo'}$ è l'accelerazione dell'origine del sistema $O'(x', y', z')$ rispetto ad O: trascinamento di sola traslazione $\vec{a}_{tt}$

2° termine a 2° membro

$$\frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

3° termine a 2° membro

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x' \hat{i}' + \dots + v_z' \hat{k}') =$$

$$= \frac{dv_x'}{dt} \hat{i}' + v_x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots + \frac{dv_z'}{dt} \hat{k}' + v_z' \frac{d\hat{k}'}{dt} =$$

$$= (a'_x \hat{i}' + \dots + a'_z \hat{k}') + \left(v'_x \frac{d\hat{i}'}{dt} + \dots v'_z \frac{d\hat{k}'}{dt}\right) =$$
$$= \vec{a}' + (v'_x \vec{\omega} \wedge \hat{i}' + \dots v'_z \vec{\omega} \wedge \hat{k}') =$$
$$= \vec{a}' + (\vec{\omega} \wedge v'_x \hat{i}' + \dots + \vec{\omega} \wedge v'_z \hat{k}')$$
$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (v'_x \hat{i}' + \dots + v'_z \hat{k}') =$$
$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

Riscriviamo l'equazione (7) con i risultati ottenuti per ogni termine:

$$\vec{a} = \vec{a}_{oo} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' \qquad (7')$$

L'accelerazione assoluta nel sistema di riferimento fisso **O** è data dalla somma di tutti i termini presenti in (7'), chiariamone alcuni

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{tt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{a}_{tr} + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{a}_r$$

$\vec{a}_{oo'} = \vec{a}_{tt}$ accelerazione di trascinamento di traslazione.

$\vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = -\omega^2 \vec{r}' =$ accelerazione di trascinamento di sola rotazione.

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'$ accelerazione che si presenta nel caso $\vec{\omega}$ non sia costante int.

$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ accelerazione complementare detta anche di Coriolis presente se la velocità relativa $\vec{v}_r$ del punto materiale $\neq 0$.

$\vec{a}_r$ = accelerazione relativa.

Ovviamente in un sistema di riferimento non inerziale le leggi di Newton valgono a condizione che si considerino anche le forze fittizie.
La Terra sulla quale viviamo non è un sistema inerziale, $\vec{\omega}$ è costante pertanto la 7 diventa

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_{tr} - 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Ovviamente stiamo considerando il moto solo rispetto al suo asse di rotazione, non quello intorno al sole.

Quindi qualsiasi corpo sarebbe soggetto alla forza centrifuga

$$\vec{F}_{CF} = -m\,\vec{a}_{tr} = m\,\omega^2\,\vec{r}$$

vedere la correzione a $\vec{g}$.

ed alla forza di Coriolis

$$\vec{F}_c = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

che giustifica la tendenza delle correnti d'aria e correnti fluviali o oceaniche e marine di deviare verso destra nell'emisfero boreale e a sinistra nel emisfero australe.

Evidenza inconfutabile, infatti della rotazione della Terra è l'esperienza del pendolo di Foucault, in cui il piano di oscillazione di un pendolo ruota in senso opposto alla rotazione della Terra.