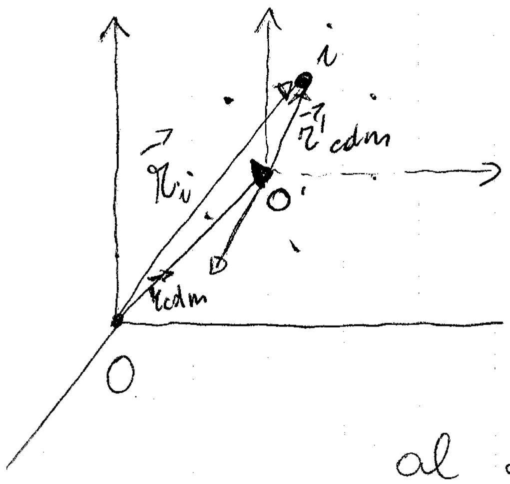
2° Teorema di König

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali rispetto ad un sistema di riferimento arbitrario è $E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$.



La relazione tra il vettore posizione del punto materiale i rispetto al sistema di riferimento $O\{x, y, z\}$ ed il vettore posizione r'_i rispetto al sistema di riferimento $O'\{x', y', z'\}$ sul centro di massa è

(1) $\vec{r}_i = \vec{r}_{cdm} + \vec{r}'_i$

Otteniamo anche la relazione tra le velocità dalla (1) mediante la derivazione rispetto a t:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cdm} + \vec{v}'_i$$

Teorema di König afferma che l'energia cinetica di un sistema di punti materiali (E_K) è data dalla somma dell'energia cinetica del centro di massa ($E_{K\,cdm}$) e l'energia cinetica interna (E'_K) relativa al centro di massa, in modo esplicito:

$$E_K = \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2}_{(E_K)} = \underbrace{\frac{1}{2} M v_{cdm}^2}_{(E_{K\,cdm})} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2}_{(E'_K)}$$

Dimostrazione:

$$v_i^2 = \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i \qquad (\bullet \text{ prodotto scalare})$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cdm} + \vec{v}_i'$$

L'energie cinetica $E_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_{cdm} + \vec{v}_i' \right) \bullet \left(\vec{v}_{cdm} + \vec{v}_i' \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_{cdm} \cdot \vec{v}_{cdm} + \qquad (1^\circ)$$

$$+ 2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{cdm} \bullet \vec{v}_i' \right) + \qquad (2^\circ)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{cdm} \cdot \vec{v}_i' = \\ = \vec{v} \; . \end{array} \right.$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i' \qquad (3^\circ)$$

Il 1° Termine:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_{cdm} \bullet \vec{v}_{cdm} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, v_{cdm}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} v_{cdm}^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{1}{2} M v_{cdm}^2 \equiv E_{K\,cdm}$$

Il 2° Termine

$$\frac{2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_{cdm} \bullet \vec{v}_i' = \vec{v}_{cdm} \bullet \overbrace{\sum m_i \vec{v}_i}^{\emptyset} = \emptyset$$

Il 3° Termine: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{v}_i' \bullet \vec{v}_i' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, v_i'^2$

$$= E_K'$$

c.v.d