1 Teorema di König

$$\vec{L} = \vec{L}' + M\, \vec{r}_{cdm} \wedge \vec{v}_{cdm} = \vec{L}' + \vec{L}_{cdm}$$

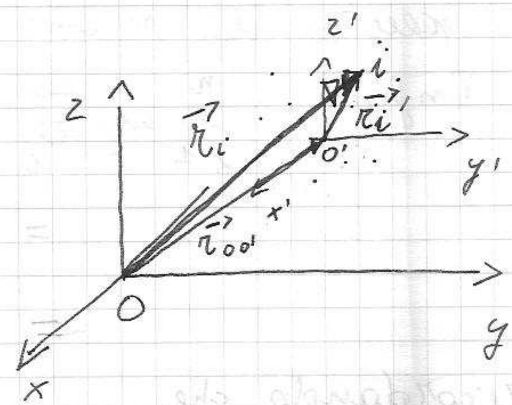
Il momento angolare di un sistema di n punti materiali si può descrivere come

momento angolare orbitale $M\, \vec{r}_{cdm} \wedge \vec{v}_{cdm}$

e momento angolare di spin $\vec{L}' = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i'$

$\vec{L}_{cdm}$ è il momento angolare del centro di massa che può essere visto come un punto materiale avente vettore posizione $\vec{r}_{cdm}$, velocità $\vec{v}_{cdm}$ e la massa Totale $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

L'_{cdm} momento angolare dei punti materiali visto dal sistema di riferimento relativo al cdm.



Dimostrazione:

Possiamo esprimere il vettore posizione di ogni punto materiale i come

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}_i'$$

Nel nostro **caso** prendiamo O' sul centro di masse $\vec{r}_{OO'} \equiv \vec{r}_{cdm}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cdm} + \vec{r}_i' \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i = (\text{sostituendo } \vec{r}_i \text{ e } \vec{v}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i\, (\vec{r}_{cdm} + \vec{r}_i') \wedge (\vec{v}_{cdm} + \vec{v}_i') =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{r}_{cdm} \wedge \vec{v}_{cdm}\right) + \qquad (1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \; \vec{r}_{cdm} \wedge v_i' + \qquad (2°)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \; \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_{cdm} + \qquad (3°)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \; \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i' = \qquad (4°)$$

Il 1° termine $\quad M \; \vec{r}_{cdm} \wedge \vec{v}_{cdm}$

(2°) $\quad$ " $\quad \vec{r}_{cdm} \wedge \sum m_i \vec{v}_i' = 0$

(3°) $\quad$ " $\quad \sum_{i=1}^{n} m_i \; r_i' \wedge \vec{v}_{cdm} = 0$

(4°) $\quad \sum_{i=1}^{n} m_i \; \vec{r}_i' \wedge \vec{v}_i' = L'$

Il 2° è nullo perché $\quad \sum m_i \vec{r}_i' = 0$

Il cdm del sistema di punti relativamente al centro di massa è nullo.

Infatti $\quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = \sum_i m_i \left(\vec{r}_{id} - \vec{r}_{cdm}\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{cdm} =$$

$$= M \cdot \vec{r}_{cdm} - M \; \vec{r}_{cdm} = 0$$

ricordando che

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} .$$

Il 3° Termine è nullo perché $\quad \sum \vec{p}_i' = 0$

$$\sum \vec{p}_i' = \sum m_i \vec{v}_i' = \sum_i m_i \left(\vec{v}_{cdm} - \vec{v}_i\right) =$$

$$= \sum m_i \vec{v}_{cdm} - \sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{cdm} - M \vec{v}_{cdm} = 0$$