Problemi sui vettori

Vettori in due dimensioni

Vett. 1

Dati i vettori $\mathbf{a} = 4.0\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\hat{\mathbf{j}}$ m , $\mathbf{b} = -4.0\,\hat{\mathbf{i}} - 3.0\,\hat{\mathbf{j}}$ m , $\mathbf{c} = -4.0\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\hat{\mathbf{j}}$ m e $\mathbf{d} = 4.0\,\hat{\mathbf{i}} - 3.0\,\hat{\mathbf{j}}$ m :

a) disegnarli su un sistema di assi coordinati cartesiani **O**(x,y),
b) calcolare le coordinate polari ed indicarle sul grafico precedente.

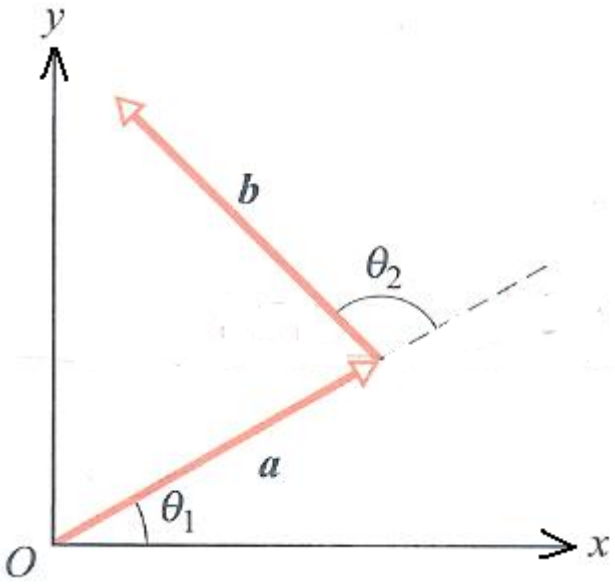
Vett. 2

Dati due vettori **a** e **b**:

$$\mathbf{a} = -2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 1.0\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = -1.0\hat{\mathbf{i}} - 2.0\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m}$$

a) Calcolare è la somma (**s**) e la differenza (**d**).
b) Quali sono modulo, direzione e verso di **s** = **a** + **b** e **d** = **a** – **b**, rispetto ad all'asse x?
c) Disegnare i vettori **s** e **d** su un sistema cartesiano di assi coordinati **O**(x,y).
d) Ricavare le coordinate polari di **s** e **d** in funzione delle coordinate cartesiane e indicarle rispettivamente sul sistema cartesiano **O**(x,y).
e) Trovare per i vettori **s** e **d** per i relativi versori ($\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\mathbf{d}}$) e moduli e rappresentarli in funzione dei versori.

Vett. 3



Due vettori **a** e **b** hanno modulo uguale $a = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = b = 10.0$ m , ma sono orientati come mostrato in figura, con $\theta_1 = 30.0°$ e $\theta_2 = 105°$. Si trovi il vettore

a) somma **s** = **a** + **b**, la sua componente x ed il componente **x**, la componente y ed il componente **y**.
b) Il modulo di **s**, e fornire la direzione e verso rispetto all'asse x.
c) Fornire le rispettive coordinate polari (ρ,ϕ) ed indicarle sul grafico.

Vett. 4

Si verifichi sul un sistema di assi coordinati **O**(x,y) che il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\vartheta$, dove *a* è il modulo del vettore **a**, *b* il modulo del vettore **b** e ϑ l'angolo tra i due vettori, è pari al prodotto delle componenti secondo la relazione $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

Verificare inoltre che il prodotto scalare $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ indica sia la proiezione di **a** su **b** per *b* ed equivalentemente la proiezione di **b** su **a** per *a*.

Vett. 5

Ricavare la legge del coseno (di Carnot) per un triangolo qualsiasi, mediante l'utilizzo del prodotto scalare tra due vettori **a** e **b** e ricavare il teorema di Pitagora come caso particolare in cui θ l'angolo tra **a** e **b** è pari a π/2.

Ricavare la legge dei seni valida per un triangolo qualsiasi mediante l'utilizzo del prodotto vettoriale.

Dedurre dalla definizione di prodotto vettoriale ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$), che il modulo del prodotto vettoriale è uguale all'area del parallelogramma individuato da **a** e **b**.

Vettori in 3 dimensioni

Vett. 6

Dato il vettore $\mathbf{a} = -3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}} - 2.0\,\hat{\mathbf{k}}$ ed il vettore $\mathbf{b} = 3.0\,\hat{\mathbf{i}} - 2.0\,\hat{\mathbf{j}} + 2.0\,\hat{\mathbf{k}}$,

a) disegnare entrambi i vettori su un sistema di coordinate cartesiane.
b) Trovare le coordinate polari sferiche e indicarle sul sistema cartesiano **O**(x,y,z).
c) Trovare le coordinate polari cilindriche ed indicarle sul sistema cartesiano **O**(x,y,z).

Vett. 7

Tre vettori sono rappresentati da $\mathbf{a} = 3.0\,\hat{\mathbf{i}} + 3.0\,\hat{\mathbf{j}} - 2.0\,\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = -1.0\,\hat{\mathbf{i}} - 4.0\,\hat{\mathbf{j}} + 2.0\,\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{c} = 2.0\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0\,\hat{\mathbf{j}} + 1.0\,\hat{\mathbf{k}}$

a) si calcolino $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.
b) Si disegni su assi coordinati cartesiani il vettore **a** ed il vettore **g**= $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
c) si dimostri che **g** è ortogonale ad **a**.
d) Si trovino le coordinate polari sferiche e cilindriche di **g**, e si riportino graficamente su un sistema di assi coordinati cartesiani **O**(x,y,z).

Derivate di vettori e versori

Vett. 8

Si dimostri che, dato un vettore **W** di modulo costante nel tempo (W(t)=costante), la $\frac{d\mathbf{W}}{dt} \perp \mathbf{W}$.

Vett. 9

Si ricavi che la derivata di un vettore unitario **u** risulta pari a $\left|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt}$, si disegni il vettore **n**, rispetto a **u**(t) ed **u**(t+dt) tale che $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{n}$. Individuare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$.

Verificare le relazioni $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = \omega\,\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ su grafico mediante la regola della mano destra.