Derivata di versori e vettori (addendum)

Dato un vettore $\vec{w}$ in modulo costante nel tempo si ha che $\frac{d\vec{w}}{dt}$ è ortogonale a $\vec{w}$ ($\vec{w}$ cambia solo direzione).

Dim.:

$w = cost$, $w^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$ (1) anche $w^2 = cost$

Derivando il 1° membro di (1):

$$\frac{dw^2}{dt} = \frac{dw^2}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = 2w\frac{dw}{dt} = 0$$

in quanto $\frac{dw}{dt} = 0$.

Deriviamo il 2° membro di (1):

$$\frac{d}{dt}(\vec{w}\cdot\vec{w}) = \frac{d\vec{w}}{dt}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\frac{d\vec{w}}{dt} = 2\vec{w}\cdot\frac{d\vec{w}}{dt}$$

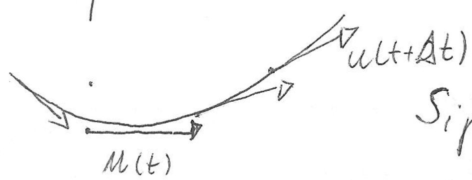
La (1) si riscrive come

$$0 = 2\vec{w}\cdot\frac{d\vec{w}}{dt}$$

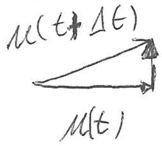
pertanto $\vec{w} \perp \frac{d\vec{w}}{dt}$ c.v.d.

Derivata di un versore.

Un versore è un vettore di modulo 1, ma può variare la direzione nel tempo, in questo caso $\frac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$



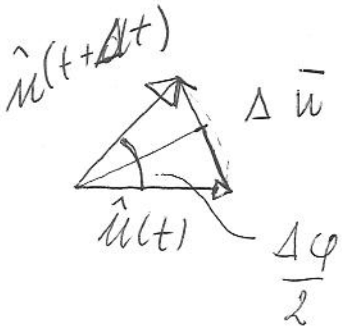
Si pensi a un vettore tangente ad una curva, il suo versore cambierà direzione nel tempo.



Vediamo anche graficamente che $\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ tende ad allinearsi $\perp$

perpendicolarmente a $\hat{u}(t)$.

Quanto vale $\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right|$?



Se l'angolo tra $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}(t+\Delta t)$ viene indicato con $\Delta\varphi$, si ottiene

$$|\Delta\vec{u}| = 2\, u \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{|\Delta u|}{\Delta t} = \frac{|\Delta u|}{\Delta\varphi}\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Per $\Delta t \to 0$ $\Delta\varphi \to 0$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta u|}{\Delta t} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2u\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}{\Delta\varphi}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

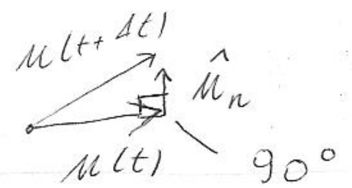
Sostituendo $x = \Delta\varphi/2$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

u è il modulo del versore $= 1$

Quindi

$$\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{velocità angolare}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{u}_n$$



$\frac{d\varphi}{dt}$ descrive la rapidità con la quale il vettore cambia direzione.

$$\left[\frac{d\varphi}{dt}\right] = sec^{-1}$$

Possiamo individuare un vettore che chiameremo $\vec{\omega}$, tale che $|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ e che moltiplicato vettorialmente con $\hat{u}(t)$ dia $d\hat{u}/dt$

$\vec{\omega}$ sarà ortogonale a $\hat{u}(t)$ e $\hat{u}_n$.

$$\vec{\omega}\wedge\hat{u} = \frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{u}_n \qquad (2)$$

Derivata di un vettore $\vec{w}(t)$ qualsiasi.

Posso esprimere $\vec{w} = w\,\hat{u}_w$ in modulo (w) e direzione e verso ($\hat{u}_w$).

$\vec{w}$ può variare in modulo $w(t)$ e direzione $\hat{u}_w(t)$ pertanto

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d}{dt}(w\,\hat{u}_w) = \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + w\frac{d\hat{u}_w}{dt} \quad (3)$$

$\frac{d\hat{u}_w}{dt}$ posso esprimerla come $\vec{\omega} \wedge \hat{u}_w$

quindi l'equazione (3) si può riscrivere

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + w\,\vec{\omega} \wedge \hat{u}_w =$$

$$= \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + \vec{\omega} \wedge \vec{w}$$

Il 1° termine a 2° membro $\left(\frac{dw}{dt}\hat{u}_w\right)$ si ha se il modulo varia nel tempo, il 2° termine $(\vec{\omega} \wedge \vec{w})$ se cambia la direzione del vettore.

Integrazione vettoriale

Dato $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}$

Si ha $\vec{A}$ integrale di $\vec{a}$ da:

$$\vec{A} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k})\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,\hat{\imath}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)\,\hat{\jmath}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)\,\hat{k}\,dt =$$

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ costanti rispetto a t:

$$\vec{A} = \hat{\imath}\int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,dt + \hat{\jmath}\int_{t_1}^{t_2} a_y(t)\,dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} a_z(t)\,dt$$