

## Equazione vettoriale del moto: traiettoria e legge oraria.

Si dice che *un corpo è in moto* rispetto a un dato sistema di riferimento  $S$ , quando la sua posizione in  $S$  cambia con il tempo. Nello schema del punto materiale, le caratteristiche del movimento in  $S$  sono fornite dalla conoscenza del vettore posizione  $\mathbf{r}$  del punto in funzione del tempo.

Nel nostro concetto di tempo è implicita l'ipotesi che esso vari con *continuità* (sia quindi rappresentabile con una variabile continua  $t$ ). A quest'ipotesi ne corrisponde un'altra sulle caratteristiche del moto: la nostra intuizione infatti ci suggerisce che, se consideriamo le posizioni di un punto materiale  $P$  ai tempi  $t$  e  $t + \Delta t$ , la loro distanza sia tanto più piccola quanto più è piccolo  $\Delta t$ . In termini più formali assumiamo che, per ogni fissato  $t$ , risulti

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t + \Delta t)| \rightarrow 0 \text{ per } \Delta t \rightarrow 0.$$

Ciò equivale all'ipotesi di continuità del moto; in linea di principio, quindi, esso può essere descritto in maniera completa mediante *l'equazione vettoriale del moto*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{r}(t)$  è espresso mediante funzioni continue del tempo (per  $t$  variabile entro l'intervallo di tempo cui si riferiscono le osservazioni sperimentali). La validità di questa ipotesi non è contraddetta dalle indicazioni sperimentali; d'altro canto, essa non può essere provata sperimentalmente in modo diretto, stanti le ovvie limitazioni nell'effettiva realizzazione pratica del procedimento di limite per  $\Delta t$  che tende a zero (questa situazione si incontra spesso nella Fisica, ove procedimenti rigorosi della Matematica vanno interpretati in modo opportuno).

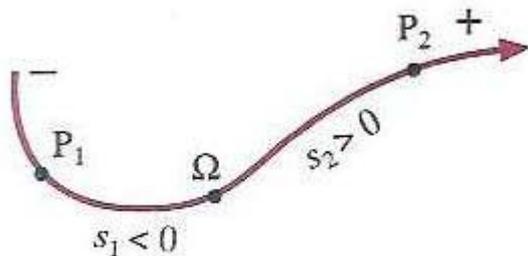
La funzione vettoriale  $\mathbf{r}(t)$  può essere rappresentata per mezzo delle tre funzioni scalari

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

che danno l'andamento nel tempo delle coordinate cartesiane del punto  $P$  nel riferimento  $S$ . Rappresentazioni equivalenti possono essere fornite dalle analoghe equazioni corrispondenti ad altri sistemi di coordinate (per esempio polari).

Le equazioni (3-2) contengono la totalità delle *informazioni cinematiche* sul moto del corpo, nel sistema di riferimento scelto. Tali informazioni sono sia di tipo essenzialmente *geometrico* sia più propriamente *fisiche*: infatti, come risulterà chiaro dalla successiva analisi, le prime permettono di individuare una curva geometrica, la *traiettoria*, cioè l'insieme delle *posizioni* occupate dal punto nel suo moto; le seconde caratterizzano le *modalità* con cui il corpo percorre nel tempo la traiettoria. In effetti, dal punto di vista geometrico, il sistema di equazioni (3-2) è un caso particolare di rappresentazione in forma parametrica di una curva nello spazio, in cui il parametro utilizzato ha tuttavia un significato fisico speciale, essendo costituito dalla variabile tempo.

Per separare in modo più diretto, nella descrizione del moto, l'aspetto geometrico da quello più propriamente cinematico, è conveniente un altro approccio, basato sulla cosiddetta **rappresentazione intrinseca della traiettoria**.



**FIGURA 3-2**  
Esempi di ascisse curvilinee.

Supponiamo di conoscere la traiettoria  $\gamma$  del punto materiale (in forma esplicita o parametrica). Ogni posizione su tale curva può essere individuata utilizzando un'opportuna estensione del metodo, che utilizza assi di riferimento cartesiani e le corrispondenti coordinate. A tale scopo supponiamo di rettificare la curva, trasformandola in una successione di segmenti (infinitesimi); definiamo su di essa un'*origine*  $\Omega$ , un *verso* e scegliamo un'unità di misura per le lunghezze (fig. 3-2).

A ogni punto P sulla traiettoria potremo allora fare corrispondere un numero reale  $s$ , detto **ascissa curvilinea**, il cui modulo fornisce, nell'unità scelta, la lunghezza dell'arco di curva (rettificato)  $\Omega P$ ; il segno sarà positivo o negativo a seconda che P si trovi, rispetto a  $\Omega$ , dalla parte del verso positivo o dalla parte opposta. Si osservi ad esempio la figura 3-2: il punto  $P_2$  ha ascissa  $s_2 > 0$ , mentre  $P_1$  ha ascissa  $s_1 < 0$ . Con l'introduzione della variabile  $s$ , la descrizione del moto di P si può effettuare conoscendo le due funzioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(s) \\ s &= s(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

In un sistema di coordinate cartesiane, l'equazione vettoriale  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  è equivalente alle tre equazioni scalari

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s); \quad (3.4)$$

che costituiscono l'**equazione della traiettoria** in forma parametrica, in termini del *parametro intrinseco*  $s$ .

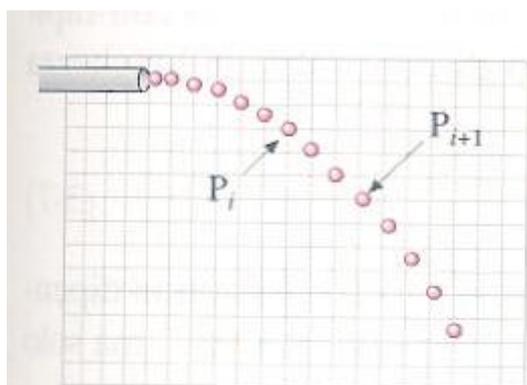
L'equazione

$$s = s(t) \quad (3.5)$$

rappresenta invece l'**equazione oraria** (o *legge oraria*).

Il moto è quindi completamente descritto dalle quattro equazioni scalari (3-4) e (3-5). La conoscenza dell'equazione oraria permette di estrarre molte informazioni sulle caratteristiche del moto.

### Introduzione al concetto di velocità

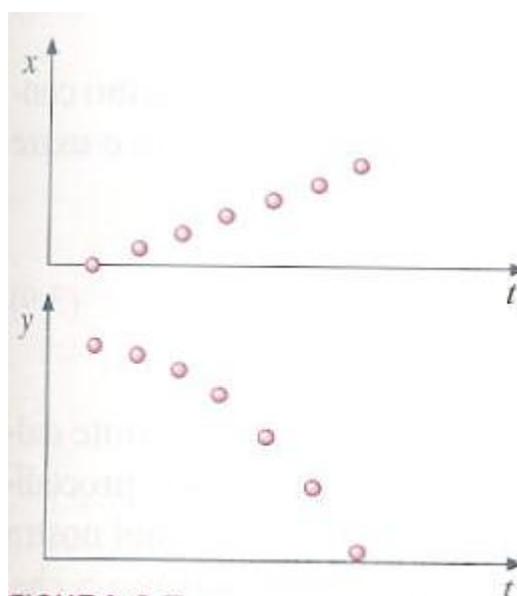


**FIGURA 3-6**  
Moto di una pallina, lanciata orizzontalmente, causato dall'attrazione terrestre.

I dati di base per la descrizione e lo studio dei moti sono costituiti dall'insieme dei risultati di *misurazioni associate di posizione e di tempo*. Esse possono essere organizzate in vari modi (sotto forma di tabelle, grafici e così via) e l'analisi delle loro correlazioni porta agli aspetti caratteristici del moto in esame. Per lo studio *quantitativo* dell'evoluzione del moto sono fondamentali i concetti di *velocità e di accelerazione*. Le grandezze fisiche corrispondenti sono grandezze vettoriali, le cui caratteristiche saranno qui introdotte con l'ausilio di un esempio particolare ma istruttivo: *il moto piano di una pallina, lanciata in direzione orizzontale da una certa quota*.

La discussione si basa sui risultati di un esperimento, condotto in condizioni tali da poter trascurare gli effetti della resistenza dell'aria sul moto della pallina.

La tecnica adottata per l'osservazione e le misurazioni delle posizioni della pallina utilizza un flash ed una macchina fotografica. In una successione di *istanti* egualmente intervallati ( $\Delta\tau$ ), il flash illumina la scena in cui avviene il moto, e la macchina fotografica (che ha l'otturatore sempre aperto) registra tutte le corrispondenti immagini della pallina su un solo fotogramma. I risultati di queste osservazioni sono sinteticamente rappresentati nella figura 3-6; essa



**FIGURA 3-7**  
Dipendenza delle coordinate della pallina dal tempo.

permette anche una prima analisi quantitativa, utilizzando uno sfondo graduato di riferimento parallelo al piano verticale del moto.

La successione nel tempo delle posizioni della pallina appare dotata di una *regolarità* che, ripresentandosi in maniera ancora più evidente nei casi in cui si ripeta la misurazione riducendo  $\Delta\tau$ , costituisce un'indicazione della validità dell'ipotesi di continuità del moto.

In quest'ipotesi, e nello schema del punto materiale, possiamo quindi aspettarci che la curva che rappresenta la traiettoria della pallina goda di definite proprietà di regolarità. Nel caso in esame, la figura 3-6 suggerisce per la traiettoria una forma parabolica, con vertice nel punto di lancio e asse verticale. Ciò è confermato da un'analisi più dettagliata delle informazioni contenute nella figura, utilizzando un sistema di coordinate cartesiane connesso con il reticolo di sfondo (asse  $x$  orizzontale e asse  $y$  verticale). Estruendo da ogni posizione registrata in figura 3-6 le coordinate  $x$  ed  $y$  del centro della pallina ai vari istanti successivi, si possono costruire i due grafici riportati in figura 3-7. Da essi si deduce che le equazioni parametriche della traiettoria (piana)  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  sono di tipo rispettivamente lineare e quadratico in  $t$ , e quindi la traiettoria è effettivamente una parabola.

Ritornando ad un esame sintetico della figura 3-6, possiamo esaminare gli spostamenti  $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$  della pallina fra le posizioni generiche agli istanti  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . Notiamo che tali vettori cambiano al variare di  $i$ , cioè cambiano con il tempo: precisamente, il loro modulo (che dà la distanza fra i punti  $P_i$  e  $P_{i+1}$ ) aumenta da un intervallo al successivo, e anche la loro direzione cambia, inclinandosi sempre più verso la verticale al crescere di  $i$ . La prima variazione suggerisce che il moto della pallina avviene con una rapidità variabile nel tempo e la seconda indica che la direzione del moto cambia con il tempo. Possiamo quindi pensare di dare un'espressione quantitativa all'evoluzione nel tempo del moto attraverso l'introduzione di opportune *grandezze vettoriali* collegate ai suddetti vettori spostamento.

## Il vettore velocità.

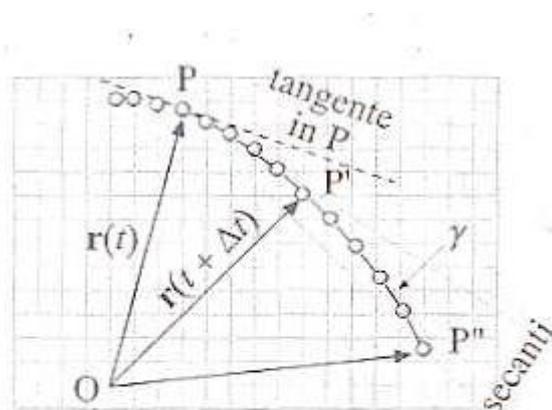


FIGURA 3-8  
Tangente e secante fra due punti della traiettoria.

Con riferimento all'esperimento descritto nel paragrafo precedente, consideriamo due istanti,  $t$  e  $t' = t + \Delta t$ , ove  $t$  è uno degli istanti  $t_i$  e  $\Delta t$  contiene alcuni  $\Delta\tau$ . Siano  $P$  e  $P'$  le posizioni occupate dalla pallina in tali istanti e  $\mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r}(t')$  i corrispondenti vettori posizione rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento (fig. 3-8). Una prima informazione sul moto (in  $\Delta t$ ) è rappresentata dal rapporto fra lo spostamento  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)$  effettuato in tale intervallo di tempo e la durata  $\Delta t$  di questo. Naturalmente essa è solo un'informazione di tipo *medio* su quanto è accaduto alla pallina fra  $t$  e  $t'$ ; in effetti, la sola conoscenza delle posizioni in tali istanti non permette di stabilire, per esempio, se la pallina si sia effettivamente mossa in linea retta lungo la direzione di  $\Delta\mathbf{r}$  oppure su una traiettoria curva, e nemmeno di sapere se il moto è avvenuto con rapidità uniforme o variabile in tale intervallo, o di conoscere la lunghezza del

percorso compiuto. Il *vettore*

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.7)$$

viene quindi chiamato *velocità media* nell'intervallo  $\Delta t$ . Essa non dipende dal percorso effettivamente compiuto nell'intervallo fra  $t$  e  $t'$ , ma solo dalle posizioni iniziali e finali, e dal tempo di percorrenza.

Una descrizione più fedele e *puntuale* delle caratteristiche del moto può essere ottenuta quando, come nel caso in esame, si hanno ulteriori informazioni sperimentali su ciò che accade fra  $t$  e  $t'$ ; se cioè possiamo studiare come si comporta il vettore  $\mathbf{v}_m$  al ridursi della durata dell'intervallo temporale  $\Delta t$ . In altri

termini, ci aspettiamo che tale descrizione possa essere data dal valore limite della velocità media per  $\Delta t$  che tende a zero.

Definiamo quindi come **velocità (istantanea)** al tempo  $t$  il vettore.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Tenendo conto della definizione di derivata di un vettore, possiamo concludere che  $\mathbf{v}$  è la *derivata del vettore posizione rispetto al tempo* e usare per esso la scrittura

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (3.9)$$

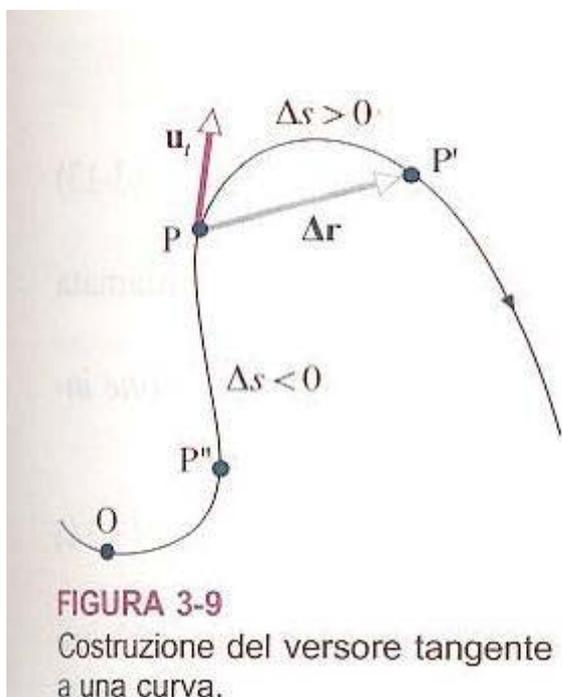
Le caratteristiche generali di questo vettore possono essere ottenute dall'esame della figura 3-8, ove sono evidenziati i passi di questo procedimento di limite (consentiti dai dati sperimentali a disposizione nel nostro esempio particolare). Nella figura è disegnata anche la traiettoria  $\gamma$  che, come si è discusso in precedenza, può essere ottenuta con ulteriori dati sperimentali e con opportune interpolazioni.

Osserviamo che, per sua definizione, la velocità media fra  $t$  e  $t'$  è un vettore parallelo allo spostamento  $\mathbf{PP}'$ , e ha quindi la direzione della retta (*secante*) che interseca  $\gamma$  in P e P'. Al ridursi di  $\Delta t$ , P' tende a P e la direzione della *secante* PP' tende (per definizione) a quella della retta *tangente* in P alla traiettoria; di conseguenza, la *velocità istantanea* al tempo  $t$  ha la *direzione* della retta *tangente* alla traiettoria nel punto P

D'altra parte, al ridursi di  $\Delta t$ , lo spostamento  $\mathbf{PP}'$  tende ad *avvicinarsi* alla traiettoria e il suo modulo, che rappresenta la lunghezza della *corda* corrispondente, è sempre meglio approssimato dalla lunghezza dell'*arco* di traiettoria ( $|\Delta s|$ ) da esso sotteso (fig. 3-9). Si ha dunque.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{PP}'|}{|\Delta s|} = 1 \quad (3.10)$$

In termini più sintetici, per  $t'$  che tende a  $t$  la direzione della *secante* tende a diventare quella della *tangente* e la *corda* tende a confondersi con l'*arco* elementare. Possiamo quindi dire che il modulo della velocità istantanea è il limite per  $\Delta t$  che tende a zero del rapporto fra la lunghezza dell'arco di traiettoria e il tempo  $\Delta t$  in cui l'arco è stato percorso; questo rapporto dà quindi effettivamente una misura della rapidità con cui viene via via percorsa la traiettoria.



### Rappresentazione intrinseca della velocità

Un'espressione formale, che esplicita le citate caratteristiche del vettore  $\mathbf{v}$ , può essere facilmente ottenuta ricorrendo alla rappresentazione intrinseca della traiettoria. La nozione che ora introduciamo a tale scopo è quella di **versore tangente** a una curva su cui siano stati definiti un'origine e un verso positivo per le ascisse curvilinee.

Le precedenti considerazioni, relative a secante e tangente a una curva, ci permettono di procedere rapidamente. Dati due punti P e P' della curva, individuati dalle ascisse curvilinee  $s$  e  $s' = s + \Delta s$ , e detto  $\Delta \mathbf{r}$  il vettore  $\mathbf{PP}'$ , consideriamo il rapporto  $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$  e il suo limite per  $\Delta s$  che tende a zero (fig. 3-9). Questo vettore ha la direzione della secante e il verso *concorde* con quello degli archi crescenti, cioè con quello scelto come positivo sulla curva (si osservino nella figura 3-9 le due situazioni con  $s' > s$  e  $s' < s$ ). Nel limite considerato esso tende ad assumere la direzione tangente alla curva in P e ad avere modulo unitario vedi la relazione (3-10), mantenendo il verso *concorde con quello dell'orientamento* della curva.

Esso è quindi il **versore tangente** alla curva orientata (nel punto P) e può essere espresso nella forma

$$\mathbf{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (3.11)$$

La conoscenza delle equazioni parametriche della curva permette quindi di determinare  $\mathbf{u}_t$  in ogni suo punto.

Tenendo conto del ruolo di variabile intermedia fra  $\mathbf{r}$  e  $t$  giocato da  $s$ , e delle relazioni (3-9) e (3-11), possiamo stabilire il legame della velocità con le equazioni della traiettoria e con la legge oraria (utilizzando le regole per la derivazione delle funzioni composte).

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (3.12)$$

La (3-12) mostra esplicitamente che la *velocità è tangente alla traiettoria*, e che il suo *modulo* è dato da  $\left| \frac{ds}{dt} \right|$ . Il verso di  $\mathbf{v}$  coincide con quello di  $\mathbf{u}_t$  (a sua volta determinato dalla scelta fatta per l'orientamento della traiettoria) o con quello opposto, a seconda che il moto avvenga *istantaneamente* nel verso scelto

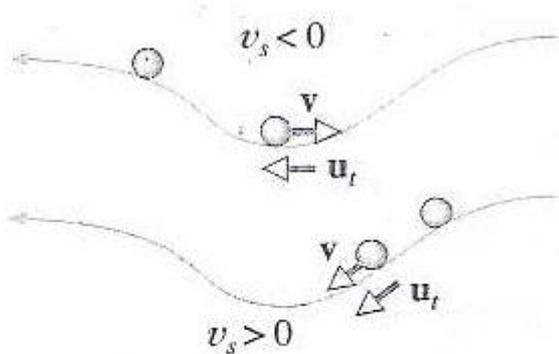


FIGURA 3-10  
Esempi di moti con velocità scalari di segno opposto.

come positivo per le ascisse curvilinee  $\left( \frac{ds}{dt} > 0 \right)$  o nel verso opposto (fig.3.10). La grandezza

$$v_s = \frac{ds}{dt} \quad (3.13)$$

è la parte scalare della velocità rispetto al versore  $\mathbf{u}_t$ ; essa viene chiamata anche *velocità scalare*.

È possibile quindi scrivere la velocità nella sua *rappresentazione intrinseca*.

$$\mathbf{v} = v_s \mathbf{u}_t = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_t = \dot{s} \mathbf{u}_t \quad (3.14)$$

La conoscenza dell'equazione oraria del moto permette di determinare la velocità scalare ad ogni istante, mediante l'operazione di derivazione rispetto al tempo.

Da quanto precede dovrebbe essere chiaro che la grandezza vettoriale *velocità* fornisce le informazioni necessarie per seguire gli spostamenti elementari di un corpo in movimento. Il moto può essere considerato infatti come una successione di spostamenti (rettilinei) infinitesimi  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ , avvenuti in intervalli temporali  $dt$ . Tali spostamenti hanno, in ogni istante, la direzione e il verso (in generale variabili) della corrispondente velocità istantanea; hanno inoltre intensità proporzionale a  $dt$ , tramite il modulo della velocità stessa. Secondo tale descrizione, è evidente che lo *spazio percorso* è la somma delle lunghezze degli archi infinitesimi percorsi sulla traiettoria e quindi è dato dalla somma delle grandezze elementari  $|ds| = |\mathbf{v}|dt \equiv vdt$ . Come è noto dall'analisi matematica questa somma può essere calcolata tramite l'integrale

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (\text{spazio percorso}) \quad (3.15)$$

### Espressione intrinseca dell'accelerazione

Il vettore accelerazione riflette le diverse possibili variazioni elementari del vettore velocità (variazioni del suo modulo, cambiamenti nella sua direzione orientata) ed è quindi importante riuscire a esprimerlo in una forma che metta in evidenza i singoli contributi di questi due fattori. Ciò si può fare partendo dalla sua definizione e dall'espressione intrinseca della velocità. È facile dimostrare che  $\mathbf{a}$  si può esprimere come

somma di due vettori componenti, uno *parallelo alla velocità*, e collegato alla rapidità di variazione della parte scalare di questa; e un altro *perpendicolare alla velocità*, dipendente dalla rapidità di variazione della sua direzione. Infatti, applicando la regola di derivazione del prodotto alla (3-14), si ha.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \mathbf{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \mathbf{u}_t + v_s \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} \quad (3.23)$$

Essendo  $v_s = \frac{ds}{dt}$  il 1° termine si può scrivere nella forma

$$\mathbf{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{u}_t = \ddot{s} \mathbf{u}_t \quad (3.24)$$

Tale componente ha lo stesso verso di  $\mathbf{u}_t$  se la velocità scalare cresce o verso opposto se la velocità scalare diminuisce. Esso è il componente di  $\mathbf{a}$  che riflette le variazioni del modulo e/o del verso di  $\mathbf{v}$ , e viene anche detto *componente tangenziale* di  $\mathbf{a}$  o brevemente *accelerazione tangenziale*, in quanto ha la direzione (tangente alla traiettoria) di  $\mathbf{v}$ .

Per ottenere un'espressione più significativa del secondo componente di  $\mathbf{a}$  (perpendicolare a  $\mathbf{u}_t$ ) bisogna esplicitare la derivata del versore  $\mathbf{u}_t$  rispetto al tempo. A tale scopo ricordiamo che il versore

tangente  $\mathbf{u}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$  dipende dalla scelta del verso positivo

per le ascisse curvilinee  $s$  sulla traiettoria, e non dalle effettive caratteristiche istantanee del moto. È quindi conveniente esprimere la dipendenza di  $\mathbf{u}_t$  dal tempo attraverso la variazione di  $\mathbf{u}_t$  al cambiare di  $s$  (che dipende dalla forma della traiettoria) e di quella di  $s$  al cambiare di  $t$  (che è più direttamente collegata al moto del punto). Si ha quindi.

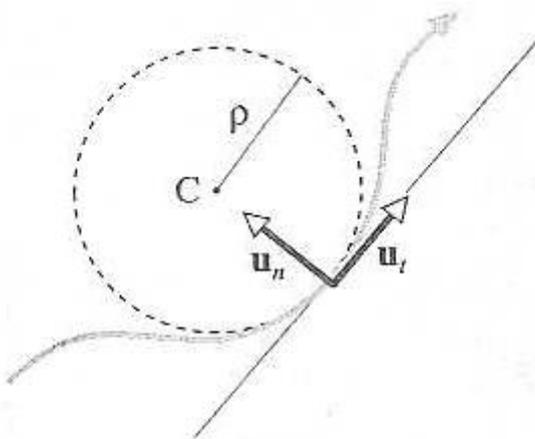
$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{u}_t}{ds} \quad (3.25)$$

La derivata del versore  $\mathbf{u}_t$  rispetto a  $s$  rappresenta una caratteristica intrinseca della traiettoria, dipendente dalle sue proprietà locali in P, e può essere espressa tramite la (2-8):

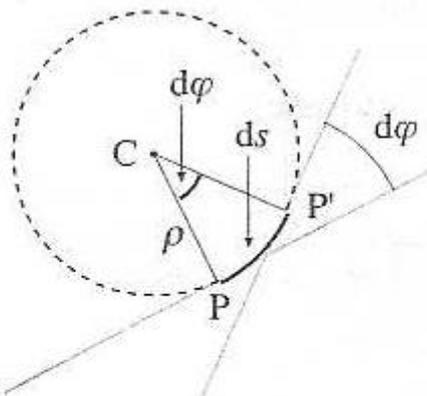
$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{u}_n$$

nella quale  $\mathbf{u}_n$  è perpendicolare a  $\mathbf{u}_t$ .

È noto dalla geometria che un elemento di curva attorno a un generico punto P può essere approssimato con un elemento di arco di una circonferenza, il cui cerchio associato è detto *cerchio osculatore*; esso ha il centro nel cosiddetto *centro di curvatura* C(P) della curva in P, e ha raggio  $\rho$  (*raggio di curvatura*;  $1/\rho$  viene invece chiamato *curvatura*). La retta perpendicolare alla tangente in P alla curva, giacente nel piano (del cerchio) *osculatore* è chiamata *normale principale* e il versore della sua direzione, orientata da P verso il centro di curvatura, è proprio  $\mathbf{u}_n$  (*versore normale*). Tutti questi elementi sono mostrati in figura 3-15, nel caso di una curva piana, per la quale il piano osculatore coincide con il piano della curva. Sia  $\rho$  che  $\mathbf{u}_n$ , così come  $\mathbf{u}_t$  dipendono dal punto P, e sono quindi *proprietà locali* della curva. L'estensione al caso di una traiettoria sghemba (per la quale anche il piano osculatore è una proprietà locale) è argomento geometrico non approfondito in questa sede.



**FIGURA 3-15**  
Cerchio osculatore, centro di curvatura e versori tangente e normale, nel punto P.



**FIGURA 3-16**  
L'angolo  $d\varphi$  fra le tangenti in P e P' è uguale all'angolo al centro formato da CP e CP'.

una proprietà locale) è argomento geometrico non approfondito in questa sede.

Poiché  $d\varphi$  è uguale all'angolo  $\frac{ds}{\rho}$  sotto il quale viene visto l'elemento di arco di curva dal centro di curvatura (fig. 3-15 e 3-16), si ha infine

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_n \quad (3.26)$$

Sostituendo nella (3-25) e nella (3-23) troviamo:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n = \ddot{s} \mathbf{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \mathbf{u}_n \quad (3.27)$$

Il componente  $\mathbf{a}_n$  viene anche detto *componente normale* dell'accelerazione (o *accelerazione normale*). È importante osservare che la corrispondente parte scalare è sempre *non negativa*, per cui  $\mathbf{a}_n$  punta sempre al centro di curvatura; essa è quindi chiamata *accelerazione centripeta* ed è esprimibile anche come

$$\mathbf{a}_n = \frac{v_s^2}{\rho} \mathbf{u}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_n$$

Quindi  $\mathbf{a}_n$  è presente in ogni moto su traiettoria non rettilinea e, di conseguenza, *ogni moto con traiettoria curva è accelerato*. Poiché il centro di curvatura si trova dalla parte della concavità della curva, anche  $\mathbf{a}$  punterà in generale verso quella parte.

La rappresentazione di  $\mathbf{v}$  data dalla (3-14) e la decomposizione di  $\mathbf{a}$  nei componenti  $\mathbf{a}_t$  e  $\mathbf{a}_n$  espressi dalla (3-27) vengono dette anche *rappresentazioni intrinseche* di tali vettori.

Per le applicazioni è utile ricordare i vari modi in cui può essere espresso il modulo dell'accelerazione, a seconda della rappresentazione usata per il vettore  $\mathbf{a}$ . Così, oltre che tramite la familiare formula, in termini delle componenti cartesiane,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

si potrà scrivere il modulo di  $\mathbf{a}$ , in termini delle componenti intrinseche,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

Nella trattazione matematica potremmo iterare il processo di derivazione e studiare la variazione dell'accelerazione, si potrebbe definire un vettore  $\mathbf{b} = d\mathbf{a}/dt = (d^3\mathbf{r}/dt^3)$  e chiamarlo strappo (dalla sensazione che si prova quando si cambia l'accelerazione, per esempio in un'automobile). E via di seguito. Ma vedremo con la Dinamica che è l'accelerazione strettamente legata all'interazione di un corpo con l'ambiente circostante.