

Esperienze di Laboratorio

Ciullo Giuseppe

Dipartimento di Fisica - Università degli Studi di Ferrara

AA 2011-2012

Di seguito sono riportate le esperienze proposte agli studenti.

Tale documento è una guida indispensabile all'approccio del laboratorio.

Lo studente è invitato a studiarla, ovviamente dopo aver seguito i corsi teorici, per poter comprendere le informazioni ed il formalismo usato, e fruire quindi delle indicazioni.

In un corso di laboratorio del primo anno spesso le formulazioni teoriche non sono del tutto accessibili, in quanto alcune leggi non sono ancora state studiate nei corsi paralleli, per questo lo studente deve conoscere bene l'analisi dimensionale, per poter verificare almeno la condizione necessaria che non ci siano errori nelle formule derivate o fornite.

Tale approccio risulta anche uno stimolo alla comprensione del linguaggio scientifico, prima di poter avere i mezzi per derivare alcune formule.

Si richiede che lo studente abbia compreso i processi per la stima degli errori e l'utilizzo delle verifiche statistiche.

Ulteriori informazioni ai fini della conduzione delle esperienze, dove necessario, saranno fornite direttamente in laboratorio.

Durante l'esperienza l'attenzione sarà rivolta soprattutto a rilevare in modo appropriato le misurazioni.

L'analisi degli errori è un'operazione successiva alla presa dati, ma lo studente dovrebbe aver in mente cosa serve per poterla fare e quindi verificare di avere tutte le misure delle grandezze in gioco per non rischiare di tralasciare nulla.

Per questo, prepararsi con la stima degli errori a priori è di fondamentale importanza.

Nel seguito si indicherà con δg l'errore totale su una grandezza g nel caso generale.

Dipenderà dalla situazione particolare quali errori lo compongono, tanto per essere chiari l'errore totale potrebbe essere la composizione di tutti o solo alcuni tra gli errori indicati nel corso come

- ϵ_g errore sistematico di sensibilità di lettura o precisione dello strumento,
- η_g errore sistematico di accuratezza,
- σ_g errore statistico (a seconda del risultato della verifica del χ^2 o $\sigma_{\bar{g}}$ o σ_g).

Per le regole di composizione si rimanda alla parte teorica.

Quindi nel corso delle dispense si indicherà l'errore a priori con δ e sarà lo studente a definire sulla base della situazione sperimentale (apparato, strumentazione ...), quale errore si possa prevedere (questo ovviamente in una

fase di progetto dell'esperimento andrebbe fatto prima, nel caso del corso di laboratorio risulta un buon esercizio, fare lo studio della propagazione degli errori a priori con le formule presenti nelle dispense, questo è molto utile per elaborare preventivamente la propagazione degli errori).

Allo stesso modo si indicherà sempre con δ l'errore a posteriori, dipenderà dal risultato dell'esperienza, quale sarà la composizione di tale errore, sulla base di considerazioni sugli errori di tipo statistico e dal confronto di quelli con gli errori sistematici.

È mia premura segnalare che quanto disponibile in laboratorio è frutto del lavoro e del contributo di più persone nel corso anche di tempi diversi.

Per gli apparati, il loro funzionamento e il loro aggiornamento si ringrazia Michele Parise ed Andrea Magnani, nonché i vari servizi del dipartimento ed INFN (officina meccanica, elettronica, progettazione ...).

Il laboratorio è il risultato della coordinazione del prof. Giancarlo Bottoni fino al 2009, al quale è dovuto il ringraziamento del dipartimento. Anche questa parte delle dispense ha preso il via da quanto fornitomi l'AA 2009/2010, con miei aggiornamenti successivi, sia nel caso di aggiornamento degli apparati, che nella modulazione armoniosa con la parte teorica.

La buona conduzione del corso si avvale del contributo e sostegno del prof. Porcú e di vari dottoranti tutori (AA 2009/2010 la dr.ssa Ceccobello, AA 2010/2011 nessun tutor per carenza di fondi, AA 2011/2012 Isabella Garzia).

Un ringraziamento e riconoscimento va anche al dr. Luca Barion, che per l'anno in corso ha partecipato all'implementazione sul piano inclinato della misura dell'accelerazione, con acquisizione da PC.

Mi preme ribadire che la descrizione delle esperienze non può intrinsecamente essere esaustiva.

Tali dispense sono una guida che permettono allo studente di prepararsi in anticipo per poter affrontare la situazione sperimentale, che dipende, dalle condizioni dell'apparato e dell'osservatore stesso.

Ferrara settembre 2010

Aggiornamento
Ferrara novembre 2011

Giuseppe Ciullo

Indice

0.1	Caduta di un grave	5
0.2	Misura della costante elastica di una molla	10
0.3	Misura del coefficiente di attrito statico con un piano inclinato	15
0.4	Misura dell'accelerazione di un corpo con un piano inclinato	18
0.5	Determinazione di g con il pendolo di Kater	21
0.6	Moto rotazionale intorno ad un asse fisso	25
0.7	Moduli di elasticità di un metallo e momento di inerzia . . .	30
0.8	Tensione superficiale e densità di un liquido	36
0.9	Misura di v_{term} di dischi e sfere in condizioni di similarità dinamica	41
0.10	Correzione alla legge di Stokes (Millikan)	43
0.11	Calibrazione di una termocoppia	50
0.12	Misura del calore specifico di un solido	54
0.13	Strumentazione per le esperienze sul suono	60
0.14	Misura della velocità del suono in aria	64
0.15	Misura della lunghezza d'onda con il metodo delle due fenditure	68
0.15.1	Esecuzione	69

0.1 Caduta di un grave

Premessa

Se si lascia cadere da fermo un oggetto pesante, esso percorre in caduta libera un quota h nel tempo t secondo la relazione:

$$h = \frac{1}{2}g \cdot t^2, \text{ da cui } g = \frac{2h}{t^2},$$

nell'ipotesi, che la resistenza dell'aria abbia effetti trascurabili.

Dalla quota percorsa (h) e dal tempo impiegato a percorrerla (t) si può misurare indirettamente g .

L'apparato sperimentale che si usa è riportato in figura 1, in cui ai capi di un commutatore I sono derivati due circuiti. Il primo serve ad alimentare un'elettrocalamita, che trattiene il grave (una sferetta d'acciaio). Il secondo, che indicheremo (OC), è costituito da un generatore di funzioni (o Oscillatore), un Contatore di impulsi ed un interruttore ad induzione magnetica B, che al passare di una sferetta apre quest'ultimo circuito OC. Tra i due circuiti si trova il commutatore I, che permette di chiudere l'uno o l'altro. La funzione dell'oscillatore e del contatore è permettere la misurare del tempo di caduta del grave. L'oscillatore invia nel circuito una corrente alternata a frequenza fissa ed il contatore ne rileva il numero di oscillazioni. Il circuito resta chiuso durante il tempo di caduta della sferetta, per cui il contatore rileverà il numero di impulsi n , nota la frequenza f dell'oscillatore (cioè il numero di impulsi al secondo), si può risalire al tempo t di caduta.

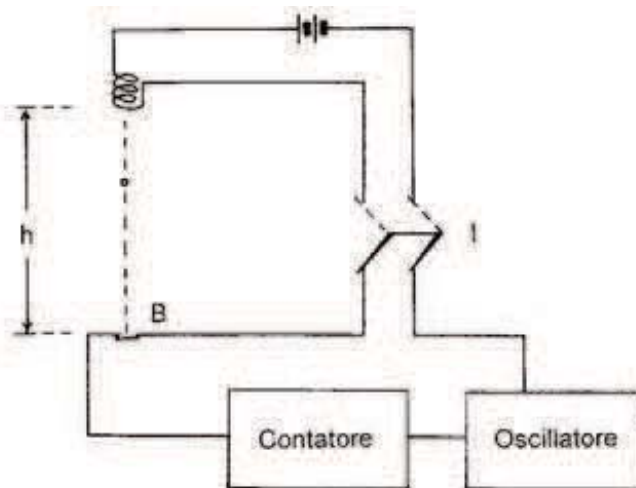


Figura 1: Schema a blocchi del circuito.

Esecuzione

Per fornire una misura del tempo di caduta dal numero di impulsi rilevati dal contatore, bisogna stimare il numero di conteggi per unità di tempo.

Cerchiamo di determinare il numero di conteggi per unità di tempo, che indicheremo n_{un} , che non è altro che la frequenza, da misurare ed è utilizzata per la stima degli errori sul tempo.

A tale scopo, chiuso con il commutatore I il circuito OC, si procede rilevando il numero di impulsi registrati (dal contatore) in un tempo misurato con il cronometro (circa 2–3 minuti), ripetendo più volte (almeno sei, due volte all'inizio, due a metà dell'esperienza e due alla fine). Si risale quindi al numero di impulsi al secondo ovvero $n_{un} = (\text{impulsi in } 2')/2'$, nel caso si sia utilizzato un tempo di 2'.

Affrontiamo ora le operazioni di misura del tempo di caduta. Si commuta I sul circuito con l'elettrocalamita, si dispone la sferetta che sia trattenuta da essa (il circuito OC risulta così aperto: nessun conteggio). Si commuta I sul circuito OC (automaticamente si apre il circuito dell'elettrocalamita), cade il grave ed il contatore inizia a rilevare il numero di impulsi. Al passaggio della sferetta attraverso l'interruttore B si apre il circuito OC, interrompendo la misura del numero di impulsi. Il contatore legge un valore n_i , è questa la nostra variabile n , misurata direttamente, sulla quale fare la verifica, che sia o no gaussiana.

Ripetendo più volte la misura, si nota che ogni volta il numero degli impulsi contati risulta leggermente diverso. Ciò è imputabile alla inevitabile presenza di incertezze casuali. Per esprimere quindi in modo corretto il risultato di questa misura occorre procedere con un'elaborazione statistica dei dati sperimentali. Si ripete pertanto n_{volte} volte ($n_{volte} = 100$) la misura del tempo di caduta, contando ogni volta il numero di impulsi n_i .

I valori di n_i trovati vengono suddivisi in classi, ottenute dividendo l'intervallo dei valori di E_k , attesi per la distribuzione gaussiana, in vari sottointervalli, o classi, con il criterio del teorema della somma di Pearson.

Ogni classe della distribuzione di Gauss conterrà, quindi, un certo numero O_k di valori proporzionale alla frequenza $F_k = O_k/N$ della classe. Riportando gli O_k , ovvero le densità di frequenza, per sovrapporci la gaussiana, in funzione di n_k in un istogramma. Facciamo l'ipotesi che i dati siano gaussiani.

Per verificare la fondatezza di questa ipotesi, cioè di una distribuzione gaussiana delle frequenze dei dati sperimentali, si esegue la verifica del χ^2 . Se tale verifica dà un esito positivo, si può esprimere l'incertezza statistica su n come deviazione standard della media.

Resta da determinare il risultato della misura dell'accelerazione di gravità

g . Di seguito presentiamo la stima degli errori a priori e indicazioni sugli errori a posteriori.

Stima degli Errori

Dalla misura del tempo come $t = n/n_{un}$:

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta n_{un}}{n_{un}}$$

Dalla relazione di g la propagazione per differenziazione dà come risultato:

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \delta t + \left| \frac{\partial g}{\partial h} \right| \delta h,$$

questa formula vale per qualsiasi tipo di errore, a priori non sappiamo cosa osserveremo, ma la propagazione possiamo già organizzarla.

Anche la verifica che le grandezze siano o no indipendenti, deve essere sperimentale, pertanto a priori possiamo solo proporre la somma lineare, che sappiamo comunque essere un limite superiore. A priori, finché non misuriamo non possiamo fare alcuna affermazione su indipendenza o casualità delle variabili.

errore a priori

L'errore massimo a priori stimabile per la misura di $g = g(h, t)$, quindi risulta per la quota h dato dall'errore di sensibilità di lettura del regolo, ovvero ϵ_h : metà della risoluzione, e l'errore sulla misura del tempo ϵ_t , da dedurre rispetto alla risoluzione dei conteggi, e dalla risoluzione del cronometro.

L'errore a priori stimabile, per il quale useremo comunque il simbolo δg è:

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \cdot \delta t + \left| \frac{\partial g}{\partial h} \right| \cdot \delta h$$

Ma dato che il tempo di caduta si ottiene da $t = n/n_{un}$

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta n_{un}}{n_{un}}$$

pertanto si deve includere nella stima a priori anche l'incertezza dovuta al sistema di misura di t OC, sulla base delle previsioni di errore su 2 minuti, con un cronometro di risoluzione 1/100 di s. Per l'incertezza sui conteggi, si assuma di poter risolvere $n = 1$, per la misura di h si può assumere una stecca metrica di risoluzione 1 mm, e l'altezza h circa 1.5 m.

errore a posteriori

Per l'errore a posteriori una volta che è stato stabilito, grazie alla verifica del $\tilde{\chi}^2$, che l'errore sulla misura dei conteggi n è di tipo gaussiano, si può quindi utilizzare la relazione per la migliore stima dell'errore totale sul tempo, tenendo conto di tutte le incertezze in gioco.

Per l'errore sul n si tenga conto che potremmo attribuire un errore statistico ed un errore sistematico. Percui potremmo sommare opportunamente questi errori in quadratura:

$$\delta n = \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{n_{volte}} + \epsilon_n^2}$$

dove per ϵ_n si intende l'incertezza di lettura del contatore, e abbiamo assunto che la verifica del χ^2 non sia stata significativa, quindi n sia gaussiana ed abbiamo utilizzato come incertezza statistica la deviazione standard della media.

Se la verifica non risultasse significativa, dobbiamo rigettare l'ipotesi che la nostra variabile sia gaussiana ed useremo come stima dell'incertezza la deviazione standard del campione: σ_n .

Un altro errore sistematico, di accuratezza, sarà dovuto a tempi di risposta del sistema, al ritardo nel rilascio della sferetta da parte del magnete, nell'istante in cui si aziona il commutatore I ed il contatore rileva gli impulsi dell'oscillatore.

Determinare questa incertezza di accuratezza non è facile. Il sistema dal 2010-2011 è stato equipaggiato per cambiare h , in tale modo si può studiare l'andamento al limite per $h \rightarrow 0$ e quindi estrarre l'errore su t_0 o h_0 , assunti nel nostro modello pari a 0 entrambi. Bisogna cambiare la quota di caduta del grave, misurare per ogni quota un numero sufficiente di volte il tempo di caduta, e processare come sopra i dati per ogni quota.

Tale misura richiede un tempo più lungo di quanto di solito si dispone per l'esperienza in laboratorio, e sarà semplicemente fornita.

Rimanendo ancora sulla misura di g , se non viene fatto alcun studio di correlazione tra h e t , non siamo autorizzati a fare la somma in quadratura.

Si può però riportare il risultato $g = \bar{g} \pm \delta g$, chiarendo come sono stati considerati e trattati i vari errori. Questa procedura deve utilizzarsi nel caso di considerazioni sul valore atteso.

Se invece si vuole presentare il risultato per distinguere i vari contributi all'errore si potrebbe anche riportare. Se n non risulta gaussiana, $g = \bar{g} \pm \sigma_g \pm \epsilon_g \pm \eta_g$. se invece risultasse gaussiana: $g = \bar{g} \pm \sigma_g / \sqrt{n_{volte}} \pm \epsilon_g \pm \eta_g$.

Spetta allo sperimentatore decidere quale tipo di presentazione degli errori

preferisce e comunque va spiegando nel lavoro di stesura della relazione o articolo.

Nel seguito delle esperienze, non avremo bisogno di ricordare come procedere nella presentazione dei dati, per cui signaleremo solo il tipo di errore e sarà sottinteso che lo studente deciderà su quale espressione e modo gli è necessario per la discussione o presentazione dei risultati.

Calibrazione

Il sistema di sgancio della bolla di acciaio, risponde in ritardo, rispetto all'attivazione del circuito, che conta gli impulsi durante la caduta del grave.

Per calibrarlo si introduce un tempo t_o nell'equazione della caduta del grave, si ha:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t + t_o)^2$$

La calibrazione viene effettuata, sulla base delle varie misure (dell'anno precedente) a varie altezze h . Dalla relazione:

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot (t + t_o) \text{ meglio } \equiv t = -t_o + \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h}$$

Si osserva che si può misurare t_o dal parametro A , della regressione lineare $y = A + Bx$, dove la variabile indipendente è $\sqrt{h}$ e la variabile dipendente risulta t . In questo modo otterremo la stima del ritardo o anticipo dell'elettronica, con l'incertezza. Quindi si potrà fornire la misura di g secondo la relazione

$$g = \frac{2h}{(t + t_o)^2}$$

E per la propagazione a dell'incertezza a priori possiamo fornire:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2 \cdot \frac{\delta t}{t + t_o} + 2 \cdot \frac{\delta t_o}{t + t_o}$$

0.2 Misura della costante elastica di una molla

Premessa

Se si applica una forza F ad una molla inizialmente a riposo, essa si estende, o si comprime, di una lunghezza Δl fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio in cui la forza F viene bilanciata dalla forza elastica di richiamo della molla: $F = k \cdot \Delta l$ ove k è la costante elastica della molla. Se la forza applicata è nota, la relazione precedente permette di ottenere il valore di k dall'allungamento Δl . Se, per esempio, alla molla applichiamo un peso mg , sospendendo al suo estremo una massa m , otteniamo:

$$mg = k\Delta l \quad (2)$$

una relazione lineare tra la massa e l'allungamento della molla, che permette di determinare la costante elastica k .

Se, ora, la massa m viene spostata di un tratto x dalla posizione di equilibrio assunta (Δl), la molla esercita sulla molla una forza $k \cdot x$. L'equazione del moto è (supponendo la massa della molla trascurabile rispetto a m):

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

la cui soluzione è la ben nota legge oraria del moto armonico:

$$x = x_0 \cos(\omega \cdot t)$$

ove: $\omega = \sqrt{k/m}$ ed ha dimensioni s^{-1} .

La massa si muove di moto armonico semplice, oscillando con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

Questa relazione permette di dedurre la costante elastica della molla k dalla misura del periodo di oscillazione T .

Le equazioni 2 e 3 individuano due metodi diversi per la misura di k , dei quali il primo si definisce “statico” ed il secondo “dinamico”.

Esecuzione

La molla ha l'estremità superiore fissa, e all'estremità inferiore possono essere applicate delle masse, con le quali si ottengono le forze peso.

La molla è racchiusa in una guaina cilindrica, fissata all'estremo inferiore, sulla quale è incisa una scala graduata in millimetri. Un tubo solidale all'estremità fissa della molla avvolge questa guaina e serve in tal modo da indice per gli allungamenti della molla.

Per eseguire la misura, bisogna preventivamente caricare la molla con un peso opportuno, realizzabile con una massa addizionale, in modo da distaccare le spire che, altrimenti, restano premute una contro l'altra. Si sospende poi la prima massa nota m all'estremità inferiore della molla e si rilevano sperimentalmente l'allungamento Δl della molla (per il metodo statico) e il periodo di oscillazione T del sistema molla-massa (per quello dinamico).

La misura di T si effettua convenientemente rilevando il tempo t necessario per un numero relativamente grande ($n = 30$) di oscillazioni complete: il periodo sarà allora $T = t/n$. Si ripetono le rilevazioni per una serie di carichi crescenti. Occorre aver cura che i carichi e le conseguenti deformazioni non siano troppo grandi, per non superare i limiti di elasticità della molla (sotto la molla si trova un cavalletto, che stabilisce il limite massimo di allungamento, che non deve essere superato).

Raccolti i dati sperimentali, si può procedere alla loro elaborazione per la determinazione della costante elastica con i due metodi.

Per il metodo statico, la relazione 2 può essere scritta come:

$$\Delta l = \frac{g}{k} \cdot m$$

che esprime una relazione lineare tra l'allungamento e la massa del carico. Per applicare il metodo dei minimi quadrati ad una relazione lineare del tipo $y = A + B \cdot x$ si verifichi che gli errori sulle x sono trascurabili e che gli errori sulle y siano uguali. Altrimenti giustificarne la semplificazione o utilizzare il metodo dei minimi quadrati pesati.

Dal coefficiente angolare della retta (figura 2) $a = g/k$ si può calcolare il valore di k , nota l'accelerazione di gravità g .

Per quanto riguarda il metodo dinamico, dobbiamo osservare nel caso di una molla reale 3, che abbia una distribuzione uniforme di massa totale m_{molla} , la soluzione dell'equazione differenziale del moto é simile all'equazione sopra riportata a condizione che si usi $m' = m_{molla}/3$. Se si trascura l'attrito e si considerano anche le masse della guaina m_{guaina} e del peso aggiuntivo m_{agg} , possiamo introdurre una massa equivalente data da $m_{equiv} = m_{agg} + m_{guaina} + m_{molla}/3 + m$, e possiamo raggruppare le masse che non cambiando in $M = m_{agg} + m_{guaina} + m_{molla}/3$. L'equazione 3 diviene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}}$$

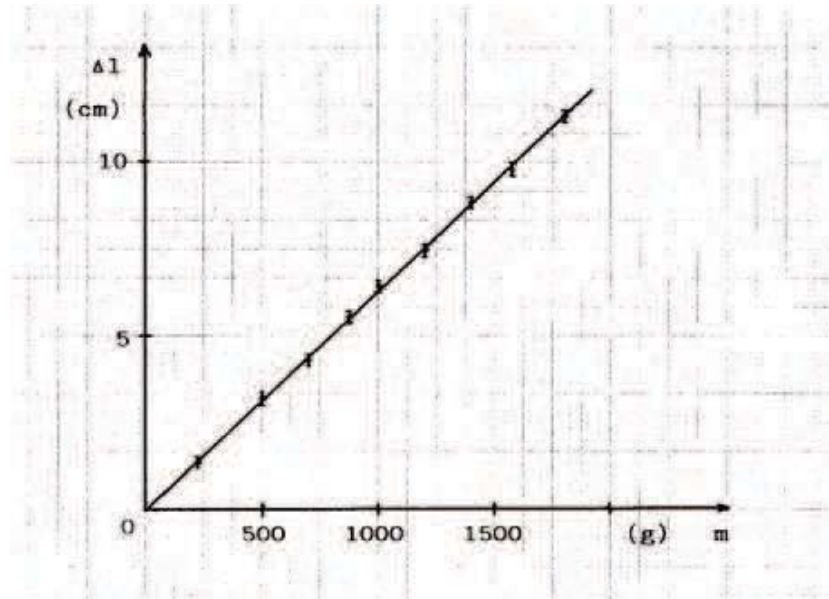


Figura 2: Andamento dell'allungamento della molla in funzione delle masse sospese.

dove abbiamo utilizzato per la massa che cambiamo semplicemente m . Essa può essere messa nella forma:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot M + \frac{4\pi^2}{k} \cdot m \quad (4)$$

in cui è esplicita la relazione lineare tra il quadrato del periodo di oscillazione T^2 e la massa nota applicata m (fig. 3). Anche per questo caso dinamico, dal coefficiente angolare della retta, da determinare sempre con il metodo dei minimi quadrati applicato ai dati di questo caso, è possibile ricavare la costante elastica della molla k .

Anche in questo caso si giustifichi la possibilità dell'utilizzo del metodo dei minimi quadrati facendo considerazioni opportune sugli errori delle ascisse e/o delle ordinate.

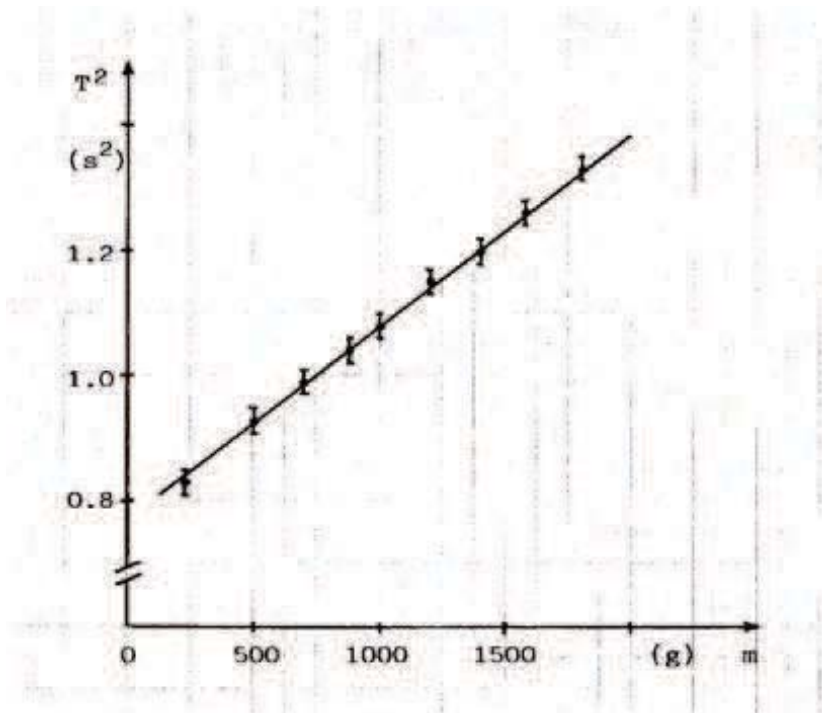


Figura 3: Andamento di T^2 di un sistema massa-molla in funzione della massa m appesa in oscillazione.

Valutazione degli errori

Errore a priori

La stima degli errori a priori riguarda la stima degli errori dovuti alla sensibilità dei sistemi utilizzati. Per esempio per l'equazione 2 si ottiene:

$$\delta k = \left(\frac{\delta g}{g} + \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta \Delta l}{\Delta l} \right) \cdot k$$

l'errore espresso dal simbolo δ risulta in questo caso l'errore massimo a priori, per il quale è possibile fornire una stima dell'errore relativo $\delta k/k$ a priori sulla base delle determinazioni degli errori seguenti:

- per g considerando i valori tabulati come errore sulla cifra meno significativa, oppure la misura nel laboratorio mediante il pendolo di Kater,
- per m l'errore di sensibilità di lettura della bilancia quindi ϵ_m ,

- per Δl l'errore di sensibilità di lettura come differenza tra due misure di lunghezza.

Stesse considerazioni sono da farsi per il caso dinamico sulla base dell'equazione (4).

Metodo dei minimi quadrati

Sulla base dell'errore sulle y e dell'errore sulle x si giustifichi l'utilizzo del metodo dei minimi quadrati, considerando il solo errore sulle y , e si giustifichi il non utilizzo del metodo dei minimi quadrati pesati. Questo si deve fare per il caso statico e quello dinamico. Si verifichi almeno per il caso "dinamico" che la regressione lineare è una buona funzione per descrivere l'andamento dei dati.

Errore a posteriori

Poiché, in entrambi i metodi, il valore di k viene misurato tramite la determinazione del coefficiente angolare della retta di regressione, è necessario calcolare l'errore da cui è affetto il coefficiente angolare B della retta, tenuto conto delle incertezze con cui sono note le grandezze in x e y .

Si potrebbe quindi osservare che soltanto le y sono soggette ad incertezze apprezzabili, mentre l'errore sulle x è trascurabile. Inoltre l'incertezza δy , per ciascun metodo, è la stessa in tutte le successive misurazioni. Queste sono condizioni semplificate, ma vanno verificate e/o giustificate.

In conclusione per entrambi i metodi si ottengono gli indici di centralità, gli intervalli di confidenza. I risultati delle due misure di k , con metodo statico e con metodo dinamico, espresse con i rispettivi intervalli di confidenza, non saranno in generale uguali e vanno confrontati per valutarne la consistenza.

0.3 Misura del coefficiente di attrito statico con un piano inclinato

Premessa

Com'è noto, la forza d'attrito esprime la resistenza che si oppone al moto relativo di due corpi. Il fenomeno, che dipende dall'interazione tra le molecole dei due corpi, è piuttosto complesso e legato a molti fattori, ma sperimentalmente si può verificare, che la forza d'attrito F_a ha un valore che, per la maggior parte degli scopi pratici, può essere considerato proporzionale alla forza normale (N), dovuta alla reazione del vincolo. La costante di proporzionalità è detta coefficiente di attrito.

Si hanno due coefficienti d'attrito: quello statico e quello dinamico. Il coefficiente di attrito statico, che interessa questa esperienza, una volta moltiplicato per la forza normale (N) dà la forza minima necessaria, per mettere in moto relativo i due corpi a contatto, che sono inizialmente fermi l'uno rispetto all'altro.

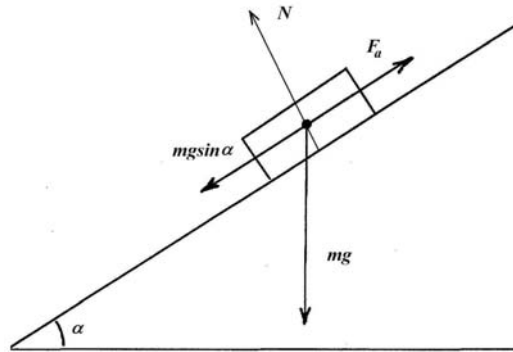


Figura 4: Diagramma delle forze nel caso di un corpo su un piano inclinato.

Per misurare tale coefficiente ci serviremo del metodo del piano inclinato fig. 4. Questo è un piano che, ruotando attorno ad un asse orizzontale, può essere inclinato dell'angolo α voluto. Su di esso viene posto il corpo, di massa m , del quale vogliamo misurare il coefficiente di attrito statico. Detto μ_s tale coefficiente, la forza di attrito può assumere il valore massimo: $F_a = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$. In cui α è il massimo angolo di inclinazione per il quale il corpo rimane fermo sul piano. Quando α è tale che si abbia: $mg \sin \alpha \geq F_a$, il corpo incomincia a muoversi. Pertanto, inclinando gradualmente il piano inclinato, possiamo trovare l'angolo α , in corrispondenza del quale il corpo incomincia

a scivolare lungo il piano. In tali condizioni si ha : $mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$ da cui:

$$\mu_s = \tan\alpha, \quad (5)$$

che ci permette, dalla lettura dell'angolo α sul goniometro del piano inclinato, di risalire al coefficiente di attrito statico.

Esecuzione

A causa della facile introduzione di errori casuali nella misura (toccando l'oggetto o il piano, o ponendo il corpo in un punto diverso del piano, o semplicemente ruotandolo, si cambiano le condizioni in cui si opera e il risultato può essere notevolmente diverso), i valori che si ottengono in prove diverse risultano distribuiti su un intervallo anche di vari gradi, per cui l'esperimento ha senso solo se sottoposto ad una buona trattazione statistica.

Si procede pertanto eseguendo numerose volte (almeno 100) la misura dell'angolo cercato, ponendo molta cura nell'inclinare gradualmente il piano finché l'oggetto sovrappostovi cominci, sia pure molto lentamente, a muoversi. Ogni volta l'oggetto deve essere posto con la stessa faccia (A o B), nello stesso punto del piano e con la stessa orientazione. Si ottengono così vari valori dell'angolo α distribuiti in un certo intervallo. Tale intervallo viene suddiviso in vari sottointervalli sulla base dei valori attesi per una distribuzione gaussiana secondo i criteri del teorema della somma di Pearson.

Si riportano i risultati ottenuti in un istogramma in funzione dei valori di angolo misurati e per la suddivisione in classi opportuna.

Per verificare la fondatezza dell'ipotesi di distribuzione di Gauss dei dati sperimentali è necessario eseguire il test del $\tilde{\chi}^2$.

variante

Sebbene sia un'esperienza semplice, a causa della poca attenzione e cura posta si osservano dati che non soddisfano in alcuni casi la verifica del $\tilde{\chi}^2$. Spesso gli studenti non hanno l'umiltà di riconoscere la propria "trascuratezza" e scaricano sull'apparato (in questo caso anche banale e semplice) i loro errori. Percui è risultato educativo svolgere l'esperienza, singolarmente. Ogni studente prende 50 misure e fa il suo studio per la verifica del $\tilde{\chi}^2$, dopodiché si fa il confronto fra le due misure (attenzione a quale deviazione standard utilizzate) e si fornisce il livello di confidenza.

Stima degli errori

Errori a priori

La stima dell'errore a priori si ottiene dall'equazione 5:

$$\delta\mu_s = \left| \frac{\partial\mu_s}{\partial\alpha} \right| \cdot \delta\alpha$$

dove nell'errore totale su α a priori possiamo solo stimare l'errore di sensibilità di lettura sugli angoli, ovvero la metà della risoluzione della scala.

Errori a posteriori

A posteriori si osserva che l'errore risulta maggiore di quello a priori. Dopo la discussione degli errori casuali si proceda secondo i criteri opportuni nella somma dei vari errori in gioco.

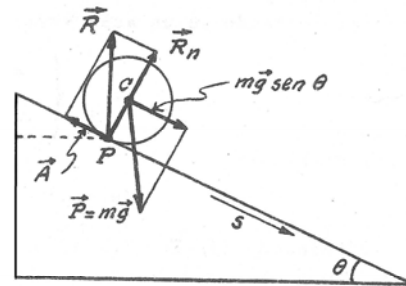
0.4 Misura dell'accelerazione di un corpo con un piano inclinato

premessa

Un corpo solido che rotola lungo un piano inclinato (cilindro o sfera) come indicato in figura 5 può essere studiato considerando una rotazione intorno ad un asse orizzontale per P (asse istantaneo di rotazione), o composto da una traslazione del centro di massa e di una rotazione intorno ad un asse orizzontale passante per C . Le forze agenti sul corpo sono P (forza peso) e R reazione vincolare.

La sollecitazione equivale ad una forza (pari alla somma delle due) applicata al centro di massa e ad una coppia. Le componenti normali al piano sono uguali ed opposte pertanto la risultante $\mathbf{F}$ è diretta lungo s ed è pari a

$$F = mg \sin \theta - A$$



dove A è la componente orizzontale della reazione al vincolo (ovvero la forza di attrito). L'attrito cosiddetto di rotolamento si origina per effetto della deformazione dei corpi a contatto, in questa situazione si può condurre il calcolo come se la forza di attrito fosse la forza radente statica (in quanto è applicata a punti in quiete sull'asse istantaneo di rotazione). Il momento risultante delle forze applicate rispetto a C è diretto come e nel verso dell'asse di rotazione ed ha intensità:

$$M = Ar$$

con r raggio del corpo. Le equazioni cardinali possono scriversi nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = m \frac{dv_c}{dt} = mg \sin \theta - A & \text{equazione delle forze} \\ Ar = \frac{db}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} & \text{equazione dei momenti} \end{cases} \quad (6)$$

Per solidi di forma sferica ed uno di forma cilindrica i rispettivi momenti rispetto all'asse sono dati dalle relazioni $I_{sf.} = 2/5 \cdot mr^2$ e $I_{cil} = 1/2 \cdot cmr^2$, $I_{tubo} = 1/2 \cdot m(r_1^2 + r_2^2)$, inoltre, dato che $v_c = \omega r$, si può scrivere la seconda delle equazioni 6 come

$$A \cdot r^2 = I \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

Si ottiene quindi dalle lle equazioni 6

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{sfera} & A = \frac{2}{5}m \frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \theta \\ \text{cilindro} & A = \frac{1}{2}m \frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow a = \frac{2}{3}g \sin \theta \\ \text{tubo} & A = \frac{1}{2}m \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} + 1 \right) \frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \frac{r_2^2}{r_2^2 + r_1^2/3} g \sin \theta \end{array} \right.$$

Si vede che l'intensità dell'accelerazione nel moto roto-traslatorio risulta per la sfera $5/7$ ($2/3$ per il cilindro) di quella, che avrebbe un corpo che scendesse lungo un piano inclinato della stessa pendenza.

Esecuzione

Per misurare l'accelerazione lungo il piano inclinato sono disponibili due traguardi, equipaggiati con due interruttori ottici. Quando il corpo passa dal primo interruttore avvia un timer, che viene fermato al passaggio del corpo del secondo interruttore.

La misura del tempo viene registrata acquisita da un computer e registrata. Se studiamo il moto del corpo lasciato libero all'inizio del piano inclinato, osserviamo che possiamo misurare la distanza tra i due traguardi Δs ed il tempo, che impiega il corpo a percorrere tale distanza Δt . Il rapporto $\Delta s / \Delta t$ è la velocità media. Spostando il secondo traguardo si può quindi misurare la velocità media. Assumiamo che la

velocità che il corpo ha al primo traguardo sia v_1 e che la velocità nei traguardi successivi sia v_n , dove per $n = 1, 2, 3, \dots$ indichiamo le possibili posizioni del secondo traguardo. La velocità media $v_m = \Delta s / \Delta t$ risulta aumentare in modo lineare con il tempo. Questo implica che la variazione della velocità sia costante. In tali condizioni sappiamo che la velocità media può essere data come $v_m = (v_1 + v_n)/2$ per qualsiasi posizione n . Pertanto si ottiene $v_m = (v_1 + v_1 + at)/2$, ovvero si osservi che

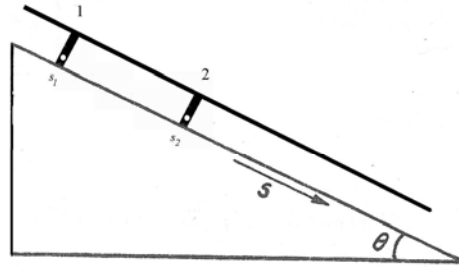


Figura 6: Piano inclinato equipaggiato con due traguardi: 1) fisso, 2) mobile.

$$v_m = v_1 + \frac{1}{2}at \quad (7)$$

Si può quindi derivare l'accelerazione di un corpo solido, che rotoli su un piano inclinato, dallo studio della dipendenza della velocità media in funzione

del tempo secondo la relazione $y = A + Bx$. L'accelerazione sarà quindi data da $a = 2 \cdot B$.

Si potrebbe eventualmente studiare la relazione di $\Delta s = v_1 t + 1/2 a t^2$ e applicare il metodo dei minimi quadrati alla regressione polinomiale.

Stima degli errori

La stima degli errori a priori si basa principalmente sugli errori di sensibilità di lettura della riga graduata che permette la misura della distanza tra i due traguardi e della risoluzione del timer.

Errori a priori

Se assumiamo di fare una stima a priori dedotta dalla semplice pendenza della curva che si suppone di poter ottenere a si potrebbe supporre incerta secondo la relazione

$$a = 2 \frac{\Delta v_m}{\Delta t}, \text{ quindi } \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta(\Delta v_m)}{\Delta v_m} + \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

dove si tenga conto che

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ quindi } \frac{\delta v_m}{v_m} = \frac{\delta(\Delta s)}{\Delta s} + \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

Dove l'errore totale risulta dalla opportuna manipolazione degli errori di sensibilità di lettura e di precisione.

A posteriori

A posteriori si potrebbe verificare su una distanza intermedia che la variabile tempo sia casuale, quindi prendere 100 dati e fare la verifica del χ^2 per il caso della distribuzione normale attesa. E quindi effettuare un numero di misure per distanza tra i traguardi sufficiente 10–20, e propagare quindi gli errori di tipo casuale. Una volta dedotta con il metodo dei minimi quadrati che la relazione lineare descrive i dati sperimentali, si può procedere nella estrazione dell'accelerazione dal parametro B della curva trovata. Dedotta l'accelerazione si può quindi fornire la confidenza che il valore teorico atteso sia in accordo con quanto misurato.

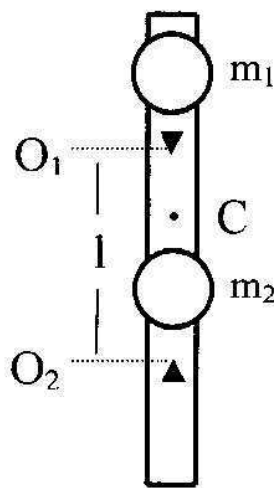
0.5 Determinazione di g con il pendolo di Kater

Premessa

Il pendolo reversibile di Kater è un particolare pendolo composto, costituito da una sbarra metallica, graduata, recante due coltelli d'acciaio ortogonali alla sbarra e paralleli tra loro (O_1 e O_2 in fig. 7).

Il pendolo può essere sospeso per i coltelli su un apposito sostegno e oscillare quindi attorno ad assi orizzontali passanti per O_1 e O_2 . La distanza $l = O_1O_2$ è solitamente nota; se non lo fosse, può essere misurata con un catetometro. La sbarra è anche munita di due masse metalliche cilindriche m_1 e m_2 uguali.

La massa m_2 può essere spostata lungo la sbarra, e posta in ogni posizione, nota, all'interno dei due coltelli, mentre la massa m_1 è fissata alla sbarra esternamente ai coltelli. Lo spostamento di m_2 fa variare il momento di inerzia del pendolo e la posizione del suo centro di massa, che comunque rimane lungo la congiungente i due coltelli. Il pendolo reversibile viene sospeso, appoggiando, per esempio, il coltello O_1 al sostegno, e fatto oscillare. Per oscillazioni di piccola ampiezza, il periodo di oscillazione è:



$$(M = m + m_1 + m_2)$$

Figura 7: Pendolo di Kater: O_1 ed O_2 , coltelli di sospensione, l distanza tra i coltelli, m_1 massa fissa e m_2 massa mobile

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (8)$$

dove I è il momento di inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione O_1 , M la massa complessiva del pendolo e h la distanza di O_1 dal centro di massa.

Se si sospende il pendolo sul coltello O_2 , si ottiene un periodo di oscil-

lazione:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{Mgh'}} \quad (9)$$

in generale diverso da T dell'equazione 8, poiché sono diversi sia il momento d'inerzia I' — è cambiata la distribuzione delle masse rispetto all'asse di sospensione — sia la distanza asse di sospensione-centro di massa h .

Per una determinata posizione delle masse cilindriche si ottiene lo stesso periodo di oscillazione per entrambi i modi di sospensione del pendolo: $T = T'$ Quando si verifica questo si ha l'uguaglianza

$$\frac{I}{Mh} = \frac{I'}{Mh'}.$$

Tale grandezza ha le dimensioni di una lunghezza e si dimostra che è pari a l la distanza tra i due coltelli. In tali condizioni il periodo di oscillazione del pendolo reversibile ha la stessa forma dell'equazione del pendolo semplice:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (10)$$

dove l (distanza tra i coltelli) prende il nome anche di lunghezza ridotta del pendolo composto. Dalla relazione 10 una volta individuato e misurato il periodo comune è possibile ricavare la misura di g .

Esecuzione

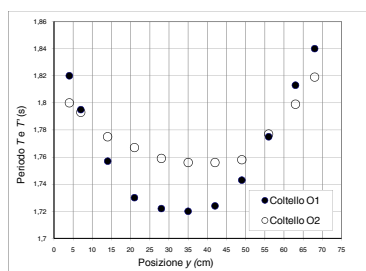


Figura 8: Periodi di oscillazione per pendolo sospeso sul coltello O₁ (●) e sul coltello O₂ (○) in funzione della posizione y della massa m_2

O₂ e si ottiene con le stesse modalità, il periodo di oscillazione T'_1 .

Per trovare il valore del periodo comune T si può procedere nel modo seguente.

Posta la massa m_2 in una posizione sulla sbarra, individuata dalla quota y_1 letta sulla scala graduata della sbarra (distanza della massa m_2 dal coltello O₁), si sospende il pendolo per il coltello O₁ e si ottiene il periodo T_1 misurando il tempo t_1 necessario per $n = 10$ oscillazioni ($T_1 = t_1/n$). Si capovolge il pendolo, lo si sospende per il coltello O₂ e si ottiene con le stesse modalità, il periodo di oscillazione T'_1 .

Si fa scorrere poi la massa m_2 lungo la sbarra fino a una nuova posizione y_2 , spostandola, p. es., di 10 cm, e si ripetono le misure del periodo di oscillazione attorno a O_1 (T_2) e a O_2 (T'_2). Si procede così successivamente per un certo numero di posizioni individuate dal pedice indicizzato. Portando in un grafico i periodi T e T' in funzione delle posizioni y si ottengono due curve, che si intersecano in due punti (come in fig. 7). Tali intersezioni indicano le possibili posizioni della massa m_2 , che danno luogo a uguali periodi di oscillazione attorno ai due centri di sospensione indicheremo tale periodo con $\tilde{T}$.

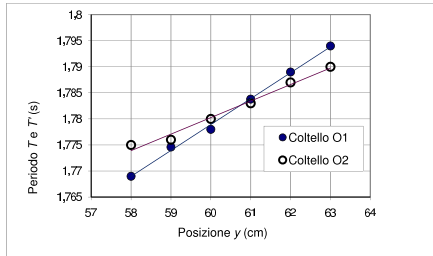


Figura 9: Periodi di oscillazione nel punto di intersezione: pendolo sospeso sul coltello O_1 ($\bullet$) e sul coltello O_2 ($\circ$) vs posizione y della massa m_2

Per avere una determinazione più precisa del periodo $\tilde{T}$, occorre ripetere le misure restringendole ad un piccolo intervallo avente centro nella quota di uno dei punti di intersezione delle due curve. In questa seconda fase conviene spostare la massa m_2 di 1 cm per volta e misurare il periodo contando un maggior numero di oscillazioni (p. es., $n = 50$), oppure ripetere la misura di 10 oscillazioni per 5 e quindi considerare la deviazione standard come errore. Si ottiene quindi un nuovo grafico (vedi fig. 9), su cui si indi-

vidua la coincidenza dei due periodi dall'ordinata del punto di intersezione delle rette (nel caso delle misure ripetute 5 volte l'errore da riportare è dato dalla deviazione standard su ogni singolo dato sperimentale). Noto $\tilde{T}$ in questo modo, si potrà ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g secondo l'equazione 8.

Stima degli errori

Errori a priori

La stima che si può fornire a priori sulla base dell'equazione (8):

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2 \cdot \frac{\delta T}{T}$$

sarà quindi determinata dall'errore di sensibilità di lettura della distanza tra i due coltelli e dell'errore sulla sensibilità di lettura del cronometro.

Errori a posteriori

Per la stima degli errori a posteriori, risulta opportuno riportare i valori medi di ogni misurazione e gli errori rispettivi.

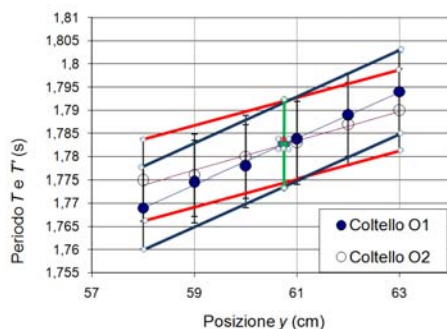


Figura 10: Fig. 9 con barre di errore. In verde punto di intersezione ed rispettivo errore dato dall'intersezione tra le due bande individuate da righe blu per O₁ (●) e da righe rosse per O₂ (○).

intersezione tra due rette, ottenute entrambe mediante il metodo dei minimi quadrati. Si deve solo considerare che il valore $\tilde{T}$ sarà determinato dall'uguaglianza $T' = T$. Il valore y della posizione, per il quale si verifica tale uguaglianza si ottiene da $A' + B'y = A + By$, da cui si ricava la miglior stima della posizione $\tilde{y}$ come funzione dei parametri delle due rette e l'errore $\delta\tilde{y}$ dalla propagazione degli errori. In questo caso si noti che y la posizione della massa m_2 è la variabile indipendente per entrambe le rette.

Utilizzando una qualsiasi delle relazioni si ottiene quindi la miglior stima di T ($\tilde{T}$) con il relativo errore fornito dalla propagazione. Se si utilizza la relazione $\tilde{T} = A + B \cdot \tilde{y}$ si ottiene anche l'errore rispettivo:

$$\delta\tilde{T} = \delta A + \delta B \cdot \tilde{y} + B \cdot \delta\tilde{y}.$$

Una volta determinato tale errore ed assunto come statistico, si può propagarlo nella derivazione di g ed utilizzarlo per fare un confronto con il risultato atteso e fornire il livello di confidenza.

Nella stima degli errori si tenga conto che il periodo $\tilde{T}$ risulta dalla intersezione di due curve, la cui migliore stima sarà fornita dal metodo dei minimi quadrati per ogni curva e l'errore quindi in questo caso sul valore y relativo. La questione può essere risolta in modo grafico tenendo conto della sovrapposizione tra le barre di errore, come riportato nella figura 10.

Si lascia agli studenti l'approfondimento di una derivazione analitica dell'errore, tenendo conto che il valore si ottiene dal punto di in-

0.6 Moto rotazionale intorno ad un asse fisso

Premessa

Questa esperienza riguarda lo studio del comportamento di un corpo (volano) libero di ruotare attorno ad un asse fisso, quando è soggetto all'applicazione di momenti di forze esterne. Scopo principale di questa analisi sarà la misura del momento di inerzia del corpo. Esso può essere determinato studiando le oscillazioni torsionali del corpo sospeso con un filo metallico ad un punto fisso (torsionometro) o, come in questo caso, si può pervenire alla conoscenza del momento d'inerzia dal moto del volano in presenza di momenti di forze applicate. Sarà necessario, a tale scopo, analizzare l'effetto del momento delle forze dissipative (attrito). Il volano, rappresentato schematicamente nella figura 11, è un oggetto solido di forma circolare, in cui gran parte della massa è concentrata sulla circonferenza esterna. Ciò rende massimo il momento di inerzia a parità di massa. Nell'esperienza esso è libero di ruotare attorno a un asse fisso orizzontale. Sull'asse, solidale all'oggetto, è presente un cilindro di piccolo diametro, sul quale può essere avvolto un filo a cui è sospeso un peso di massa nota m . Quando il peso viene lasciato cadere, trascina il filo e mette in rotazione il volano. Le equazioni del moto per il peso e per il volano sono rispettivamente:

$$\begin{cases} \text{Forze} & m \cdot g - T' = m \cdot a \\ \text{momenti} & T \cdot r - \tau_a = I \cdot \alpha \end{cases}$$

dove a è l'accelerazione del peso, α l'accelerazione angolare del volano, I il momento di inerzia del volano, r il raggio del cilindro, τ_a il momento delle forze di attrito del volano attorno all'asse. Se il filo è inestensibile e di massa trascurabile le tensioni T e T' sono uguali (la fune ha la stessa tensione in ogni suo punto) e $\alpha = a/r$. In questo caso la risoluzione del sistema delle due equazioni permette di ricavare l'accelerazione:

$$a = \frac{(mgr - \tau_a)r}{I + mr^2} \quad (11)$$

Dato che tutte le grandezze da cui dipende a sono costanti, l'accelerazione a sarà costante, quindi il moto è uniformemente accelerato (traslatorio per il peso, rotatorio per il volano). a può essere trovata dal moto del peso: esso percorre distanze s legate al tempo t secondo la relazione $s = 1/2at^2$ (se misuriamo t a partire dall'inizio del moto: $v_0 = 0$). Le distanze s percorse in caduta sono legate al numero dei giri n del volano dalla relazione: $s = 2\pi rn$.

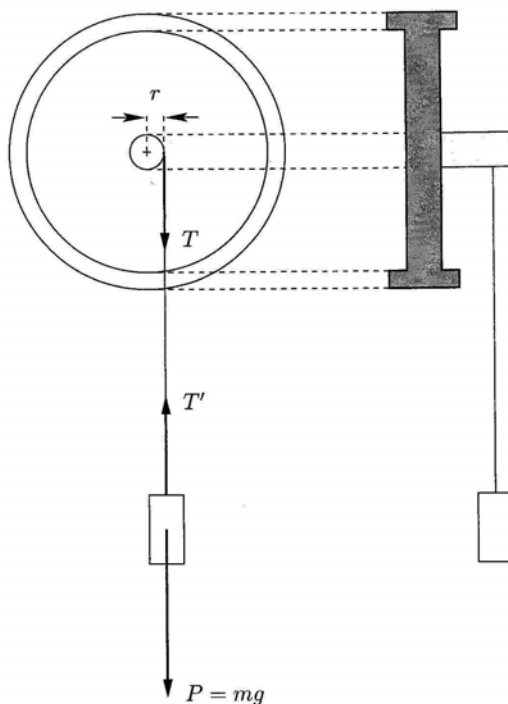


Figura 11: Disegno del sistema rotore per la misura del momento di inerzia di un volano. Visione frontale e laterale.

Dall'uguaglianza $2\pi rn = 1/2at^2$ si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{4\pi r}{a}} \cdot \sqrt{n} \quad (12)$$

la relazione lineare tra t e $\sqrt{n}$ ($t = t(\sqrt{n})$), in cui il coefficiente angolare della retta contiene l'accelerazione a .

Si misura quindi il tempo t impiegato dal peso in caduta in funzione del numero di giri n del volano (più semplice da valutare dello spazio s di caduta del peso). Con i valori misurati di t e di n , utilizzando il metodo dei minimi quadrati applicato alla regressione lineare, è possibile ottenere il coefficiente angolare, dal quale noto r si ricava a .

Misurata a , si osservi che per determinare I , mediante l'equazione (11),

ma serve determinare il momento, frenante, dell'attrito (τ_a) tra il perno e il volano.

Per fare ciò, occorre eseguire una seconda parte di esperienza. Si rimuove dal sistema il peso m con il filo ad esso collegato, e si mette, con un piccolo impulso, in rotazione il volano. La dinamica del volano è ora descritta da

$$\tau_a = I\alpha'$$

dove α' è l'accelerazione (decelerazione) angolare del volano a causa del momento, frenante, dell'attrito. Dato che τ_a può essere considerato costante (cioè indipendente dalle condizioni del moto), anche α' sarà costante. Il moto è quindi rotatorio uniformemente decelerato, ed è descritto da:

$$\begin{aligned} \text{angolo di rotazione} \quad \theta &= \omega_0 t - 1/2\alpha' t^2, \\ \text{velocità angolare} \quad \omega &= \omega_0 - \alpha' t, \end{aligned}$$

dove l'angolo θ è valutato a partire dall'istante iniziale ($t = 0$) e ω_0 è la velocità angolare in tale istante. Dalla seconda relazione possiamo vedere che il volano si fermerà all'istante t' , per cui ω si annulla :

$$0 = \omega_0 - \alpha' t' \quad \text{da cui} \quad \omega_0 = \alpha' t'$$

In tale istante l'angolo totale percorso dal volano sarà: $\theta = \alpha' t'^2 - 1/2\alpha' t'^2 = 1/2\alpha' t'^2$. Esprimendo l'angolo in funzione del numero di giri percorsi: $\theta = 2\pi n' = 1/2\alpha' t'^2$ dove n' è il numero di giri compiuti dal volano prima di fermarsi.

Si ottiene per la relazione tra l'accelerazione angolare e il numero di giri:

$$\alpha' = \frac{4\pi n'}{t'^2} \quad (13)$$

la decelerazione del volano dovuta al momento delle forze d'attrito. Essa può essere quindi misurata indirettamente dal numero di giri percorsi n' ed il tempo impiegato t' dal volano per fermarsi, sempre attraverso la regressione lineare.

Il suo valore permette di conoscere la relazione esistente tra il momento dell'attrito τ_a ed il momento di inerzia I del volano. Sostituendo τ_a con $\alpha' I$ nell'equazione (11) e risolvendo rispetto ad I si ottiene

$$I = \frac{mr^2(g - a)}{a + \alpha' r}, \quad (14)$$

che, grazie alla misura di a e α' nelle due parti dell'esperienza, permette di calcolare il valore del momento di inerzia I .

Esecuzione

Nella prima parte, per trovare la relazione tra n ed il tempo, si può far partire la ruota, sulla quale è presente un segno, e misurare il tempo per un numero fissato di giri. Risulta possibile prendere misure ripetute (almeno 5) di tempo per almeno giri diversi. In questo modo l'errore sul tempo sarà dato dalle deviazioni standard. Per questo nell'equazione 12 si era già proposto di trovare la relazione funzionale del tipo $t = t(\sqrt{n})$, da cui dedurre il coefficiente angolare B , ovviamente abbiamo assunto che non ci sia alcuno errore nella stima del numero di giri.

Diversamente per la seconda esperienza risulta casuale la posizione dove si ferma il volano, pertanto per l'applicazione del metodo dei minimi quadrati risulta opportuno trovare la relazione del tipo $\sqrt{n'} = \sqrt{n'}(t')$, in cui l'errore sulla variabile dipendente si deduce dal sottomultiplo di giri, che operativamente lo studente riesce a risolvere.

Valutazione dell'errore

Errori a priori

A priori la stima dell'errore sulla misura del momento di inerzia si ottiene, partendo dall'equazione (14):

$$\frac{\delta I}{I} = \frac{\delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta(g-a)}{g-a} + \frac{\delta(a+\alpha'r)}{(a+\alpha'r)},$$

dallo sviluppo dell'errore su somme e o differenze si ottiene per i termini terzo e quarto a secondo membro, rispettivamente

$$\frac{\delta g + \delta a}{g-a} \quad \text{e} \quad \frac{\delta a + \delta(\alpha'r)}{a + \alpha'r}.$$

Si può stimare l'errore a priori su a che quello su α' dalle equazioni (12) e (13) nel caso di una singola misura.

Errori a posteriori

La discussione degli errori a posteriori prende in considerazione, sia il fatto che t nella prima parte è dedotta da misure ripetute, che a e α' si ricavano dalla regressione lineare. Quindi, inoltre, per le rispettive accelerazioni gli errori saranno dedotti dai rispettivi coefficienti angolari. Nel caso dell'accelerazione a sulla base di un'equazione lineare del tipo $y = A + Bx$, dalla

relazione $B = \sqrt{4\pi r/a}$ si ottiene $a = 4\pi r/B^2$, per cui:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta r}{r} + 2 \cdot \frac{\delta B}{B}.$$

Invece per α' dalla relazione lineare $y = A' + B'x$ si ottiene $B'^2 = \alpha'/4\pi$ pertanto:

$$\frac{\delta \alpha'}{\alpha'} = 2 \cdot \frac{\delta B'}{B'}$$

0.7 Moduli di elasticità di un metallo e momento di inerzia

Premessa

Questa esperienza è finalizzata allo studio delle proprietà elastiche dei materiali quando sottoposti a sforzi di trazione o di taglio grazie a due apparati sperimentali: estensimetro e torsionmetro. Quest'ultimo consente anche la misura del momento di inerzia.

I corpi solidi reali, non possono essere considerati rigorosamente rigidi, infatti, se sottoposti a trazioni o compressioni, si deformano: se ad un filo metallico, vincolato ad un estremo, viene applicata una forza all'altro estremo, si osserva un allungamento. Se la forza non è troppo grande, la deformazione è reversibile (regime elastico). Tale deformazione Δl è proporzionale all'intensità della forza F (legge di Hooke): $F = k\Delta l$, dove k è la costante elastica del filo. Essa dipende anche dalle caratteristiche geometriche del corpo stesso (lunghezza, sezione, ...), quindi non è utilizzabile per esprimere le proprietà del materiale. Un parametro utile a tale scopo è invece il cosiddetto modulo di elasticità longitudinale o modulo di Young E , presente nella relazione sperimentale tra l'allungamento relativo $\Delta l/l$ e la tensione superficiale F/S (S area della sezione del filo):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}.$$

Le unità di misura di E sono N/m^2 (SI) o dyne/cm^2 (cgs). Scopo della prima parte di questa esperienza è la misura del modulo di Young E . L'ultima relazione esprime una dipendenza lineare tra allungamento Δl e forza F , che può essere espressa più convenientemente come:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{S} \cdot F, \quad (15)$$

dove il coefficiente angolare della retta l/ES contiene E . Quindi dalla misura degli allungamenti Δl del filo e delle forze F , che li inducono, mediante il metodo dei minimi quadrati, si ottiene il coefficiente angolare e, note le caratteristiche geometriche del filo, il modulo di Young E .

La misura può essere eseguita, servendosi di un estensimetro, sostanzialmente costituito da una struttura rigida (fig.12 a), cui può essere vincolato l'estremo superiore di un filo metallico, mentre l'altro estremo è fissato ad una leva di secondo genere, attrezzata con un piattello mobile, su cui possono essere caricate delle masse note m (fig. 12 a e b).

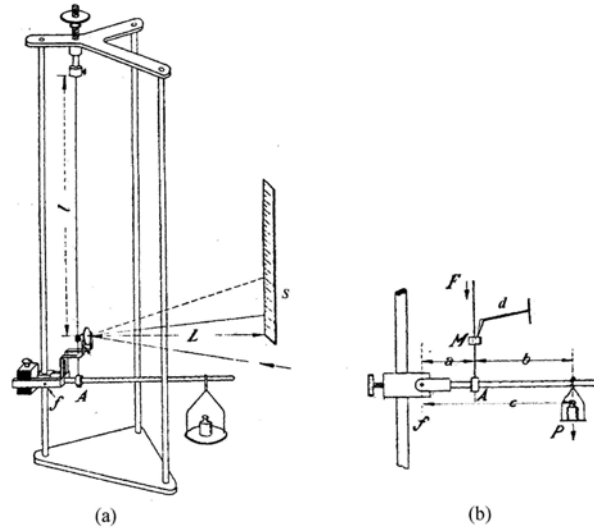


Figura 12: Estensimetro (a) e dettagli della leva ottica (b).

Questo permette di realizzare la forza di trazione F sul filo. Il momento realizzato dal peso $P = mg$ rispetto al fulcro f dà luogo ad una forza F di trazione applicata al filo, per cui vale $P(a + b) = Fa$, da cui si ottiene:

$$F = P \cdot \frac{a + b}{a} = mg \cdot \gamma \quad \text{avendo posto } \gamma = \frac{a + b}{a}$$

La conoscenza della massa m e del rapporto γ permette di ottenere il valore della forza F . La valutazione del (piccolo) allungamento Δl , provocato dalla forza F , avviene con il metodo della cosiddetta leva ottica. Sull'estensimetro è montato uno specchietto, cui è solidale un braccetto, che appoggia su un anellino fissato al filo metallico. Quando il filo subisce un allungamento Δl lo specchietto ruota attorno ad un asse orizzontale di un angolo α per il quale: $\Delta l = d\alpha$ ove d è la lunghezza del braccetto. Un fascio luminoso colpisce lo specchietto e viene riflesso su una scala graduata. Quando lo specchietto ruota di un angolo α , il fascio riflesso ruota di un angolo 2α , per uno spostamento Δs sulla scala graduata si ha la relazione:

$$\tan 2\alpha = \frac{\Delta s}{L},$$

dove L è la distanza dello specchietto dalla scala. Per piccoli angoli si può sviluppare $\tan 2\alpha$ in polinomi di Taylor ed quindi si ottiene per una approssimazione al primo ordine $\tan 2\alpha \approx 2\alpha$ Conseguentemente:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{\Delta s}{L}$$

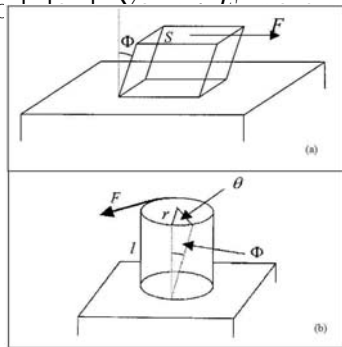
La lettura di s sulla scala graduata permette quindi di ricavare Δl , note d e L . La misura si esegue caricando successivamente masse m crescenti sul piattello e valutando i corrispondenti valori di s sulla scala della leva ottica. Da essi si ricavano i valori di Δl e F , legati dalla relazione funzionale $\Delta l = \Delta l(F)$ (equ. (15)).

Dal coefficiente angolare della retta, una volta misurate lunghezza l e area S della sezione del filo, si può ricavare il valore del modulo di Young E .

Oltre all'elasticità longitudinale, per i corpi solidi reali, si parla anche di elasticità trasversale, quando sottoposti a sforzi di taglio. Se a un corpo solido, p. es. a forma di parallelepipedo, con la base mantenuta fissa, viene applicata una forza tangenziale F sulla superficie superiore S (fig. 13 a) esso si deforma inclinandosi di un angolo:

$$\Phi = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S}$$

G è una proprietà del materiale ed è detto modulo di elasticità trasversale, o modulo di scorrimento, o modulo di rigidità. Esso è l'analogo trasversale del modulo di Young E e ha dimensioni (N/m^2 o dyne/cm^2).



Il modulo di scorrimento del materiale G può essere misurato più facilmente, se il solido ha forma cilindrica (filo a sezione circolare), del quale una base è fissa, mentre l'altra viene ruotata di un angolo θ grazie ad una forza tangenziale (fig. 13 b) o una coppia di forze. Tra il momento delle forze τ , rispetto all'asse del cilindro, e la deformazione angolare θ sussiste la relazione $\tau = k_r \theta$ — analogo rotazionale della legge di Hooke — nel regime elastico. k_r è la costante elastica rotazionale, detta “coefficiente di torsione” del filo. Il coefficiente di torsione k_r è legato al modulo di scorrimento G dalla relazione:

Figura 13: Corpi solidi soggetti a sforzi di taglio. θ sussiste la relazione $\tau = k_r \theta$ — analogo rotazionale della legge di Hooke — nel regime elastico. k_r è la costante elastica rotazionale, detta “coefficiente di torsione” del filo. Il coefficiente di torsione k_r è legato al modulo di scorrimento G dalla relazione:

$$k_r = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{r^4}{l}, \quad (16)$$

dove r e l sono rispettivamente il raggio della sezione e la lunghezza del filo metallico. Quindi misurata k_r si ricava il valore di G , note le caratteristiche geometriche del filo.

k_r si ottiene, misurando il momento della forza τ e l'angolo di deformazione θ con un metodo statico, simile a quello utilizzato per il modulo di Young.

Si può anche utilizzare un metodo “dinamico” grazie ad un apparato detto torsionometro o pendolo di torsione (fig. 14).

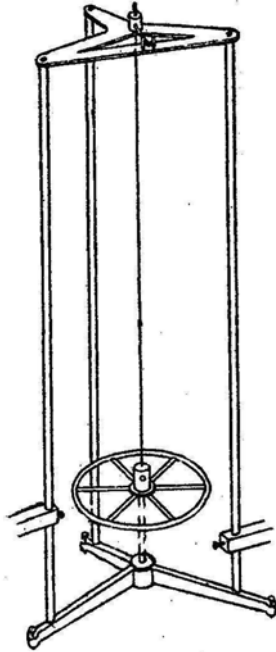


Figura 14: Pendolo di torsione.

In esso l'estremo superiore del filo metallico è fissato, mentre all'estremo inferiore è sospeso un oggetto pesante (preferibilmente simmetrico: disco o ruota), che può ruotare nel piano orizzontale attorno al suo asse, coincidente con il filo metallico. Se l'oggetto viene ruotato di un piccolo angolo rispetto alla sua posizione di equilibrio, inizia ad oscillare, per effetto del momento della forza di richiamo dovuto alla deformazione del filo.

Il periodo dell'oscillazione è dato dalla relazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k_r}}, \quad (17)$$

dove I è il momento di inerzia dell'oggetto appeso al filo. Se si aggiunge un oggetto di momento di inerzia noto I_n (metodo “perturbativo”) il periodo T_n di oscillazione sarà dato da:

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_n}{k_r}},$$

combinando tale espressione con l'equazione (17) si ottiene:

$$I = I_n \cdot \frac{T^2}{T_n^2 - T^2}. \quad (18)$$

Dalle misure dei due periodi T e T_n è possibile ottenere il momento di inerzia I .

Esecuzione

- Per quanto riguarda l'estensimetro, una volta verificato che la luce riflessa dallo specchio della leva ottica venga proiettata sulla scala graduata, si mettono sul cestello masse ad intervalli omogenei (100 g, 200 g, 300 g ecc. o 200 g, 400 g, 600 g). Si registrano in tabella i dati m

e le rispettive posizioni s della luce riflessa dallo specchietto della leva ottica, rilevate sulla scala graduata.

- Per quanto riguarda il torsionometro la misura di T si effettua ponendo in oscillazione l'oggetto sospeso al filo metallico. Si può effettuare la misura, per diminuire l'errore relativo, misurando il tempo t impiegato per compiere un numero n opportuno di oscillazioni complete (per es., $n=30$) da cui si ottiene $T = t/n$, oppure per aver una misura statisticamente più attendibile ed avere un'influenza dei vari attriti minore, si consiglia di effettuare 5 misure ripetute per 10 oscillazioni.

Si inserisce poi nel torsionometro l'oggetto di momento di inerzia noto I_n (conosciuto in quanto ha forma geometrica sufficientemente semplice da permettere il calcolo di I_n), e quindi con le stesse modalità si misura il periodo di oscillazione T_n del sistema perturbato. Anche per la misura di questo periodo, si può scegliere la misura di 30 oscillazioni o 5 misure di 10 oscillazioni.

Dai valori di T e T_n , noto I_n , con l'equazione (18) è possibile ricavare il valore del momento di inerzia I . Ricavato I (equ. 17) si ottiene il coefficiente di torsione k_r :

$$k_r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot I,$$

da cui (anche con l'equ. 16) si ottiene infine il modulo di scorrimento G :

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{l}{r^4} k_r$$

(r e l sono rispettivamente il raggio della sezione e la lunghezza del filo metallico).

Stima dell'errore

Errori a priori

A priori si possono prevedere i seguenti errori:

- Estensimetro: su E (equ. 15) sulla base degli errori di sensibilità di lettura di ogni grandezza.

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta \Delta l}{\Delta l} + \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta S}{S},$$

si tenga conto che:

$$\frac{\delta \Delta l}{\Delta l} = \frac{\delta d}{d} + \frac{\delta \Delta s}{\Delta s} + \frac{\delta L}{L}$$

Nelle formule precedenti si sono ritenuti trascurabili gli errori relativi $\delta m/m$, $\delta \gamma/\gamma$ e $\delta g/g$.

- Torsiometro: su G a priori possiamo stimare:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{G} &= \frac{\delta k_r}{k_r} + \frac{\delta l}{l} + 4 \cdot \frac{\delta r}{r} \\ \text{errore su } k_r : \frac{\delta k_r}{k_r} &= \frac{\delta I}{I} + 2 \cdot \frac{\delta T}{T} \\ \text{errore su } I : \frac{\delta I}{I} &= \frac{\delta I_n}{I_n} + \frac{\delta T^2}{T^2} + \frac{\delta(T_n^2 - T^2)}{T_n^2 - T^2} \end{aligned}$$

Lo studente deve porre molta attenzione nell'utilizzare nelle formule gli errori che si possono stimare a priori, prima di condurre l'esperienza.

Errori a posteriori

A posteriori si tenga conto che E è ottenuto dal coefficiente angolare della relazione ricavata con il metodo dei minimi quadrati, e che negli errori propagati secondo le relazioni ci sono errori statistici.

Stessa considerazione per k_r , anche se ricavato non da una relazione funzionale ma dalla sola equazione. La questione è da chiarire è quanto si può stimare a priori e cosa risulta dall'esperienza. Questa considerazione risulta più evidente se per la misura dei periori si fa 5 serie di 10 misure, per questo si consiglia tale approccio.

Una volta ottenuti i rispettivi moduli di elasticità e considerandoli quindi variabili statistiche, si confrontino con i valori attesi e se ne discuta il livello di confidenza.

0.8 Tensione superficiale e densità di un liquido

Premessa

Per aumentare la superficie libera di un liquido occorre compiere un lavoro. Questa proprietà caratteristica delle superfici dei fluidi (e in generale di tutte le superfici di separazione tra sostanze diverse) si chiama tensione superficiale, e fa sì che le superfici dei liquidi siano le meno estese possibile, come conseguenza delle forze di coesione tra le molecole del fluido stesso. Si definisce coefficiente di tensione superficiale, o semplicemente tensione superficiale, (τ) di un liquido il lavoro necessario a provocare un aumento unitario della sua superficie libera:

$$\tau = \frac{W}{\Delta A}$$

dove W è il lavoro, che occorre compiere per aumentare la superficie del liquido di ΔA . τ si misura in erg/cm² (cgs) o in J/m² (SI).

La presenza della tensione superficiale, che tende a ridurre la superficie libera del fluido, fa in modo che la lunghezza del contorno della superficie libera diminuisca. Essa può quindi essere anche interpretata come dovuta a una forza agente sull'unità di lunghezza del contorno della superficie libera, perpendicolare alla linea di contorno e diretta tangenzialmente alla superficie, verso il suo interno. In modo del tutto equivalente alla definizione precedente, la tensione superficiale può quindi essere definita:

$$\tau = \frac{F}{L}, \quad (19)$$

ove F è la forza esercitata sul contorno dalla tensione superficiale e L è la lunghezza totale della linea di contorno. In tale descrizione τ si misura in dine/cm (cgs) o in N/m (SI).

In questa esperienza la tensione superficiale di un liquido viene misurata per confronto con quella dell'acqua distillata con il metodo dello stigmometro. Tale metodo richiede anche la conoscenza della densità dei liquidi esaminati, che verrà ottenuta con l'uso della bilancia idrostatica di Mohr-Westphal.

La bilancia di Mohr-Westphal è un particolare tipo di bilancia idrostatica, basata cioè sulla spinta idrostatica, che un corpo opportuno immerso (immersore) riceve da un liquido. Essa permette di ottenere, per lettura diretta, il valore della densità del liquido in cui si trova l'immersore. La bilancia di Mohr-Westphal è costituita da una leva a bracci diseguali (15); nel braccio corto sono fissati una massa conveniente e un indice per verificare l'equilibrio.

Il braccio lungo è suddiviso in dieci parti uguali, alla cui estremità (quindi in posizione 10) è sospeso l'immersore, solitamente di vetro. Le altre nove posizioni sono fornite di pioli, sui quali è possibile sospendere quattro pesi particolari detti "cavalieri".

I due cavalieri più pesanti hanno la stessa massa: $m_1 = m_2$, il terzo ha massa $m_3 = m_1/10$, la massa del quarto cavaliere è $m_4 = m_1/100$. I cavalieri e l'immersore, dei quali la bilancia è dotata, sono tra loro in relazione: la condizione costruttiva fondamentale per la bilancia di Mohr-Westphal è che la massa m_1 (in g), del cavaliere più pesante, equivalga alla massa d'acqua distillata del Volume V spostata dall'immersore (in cm^3).

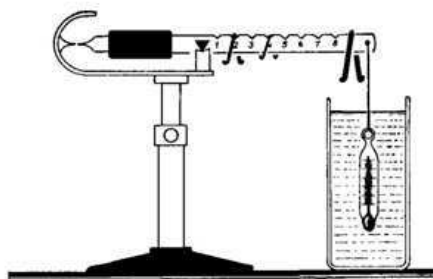


Figura 15: Bilancia idrostatica di Mohr-Westphal.

Inizialmente la bilancia è in equilibrio con l'immersore nell'aria. Quando l'immersore viene introdotto nel liquido in esame, la spinta idrostatica su di esso perturba l'equilibrio della bilancia, che deve essere ripristinato posizionando opportunamente i cavalieri. Se ciò avviene con i cavalieri m_1, m_2, m_3, m_4 nelle posizioni h, l, m e n nell'ordine, la condizione di equilibrio della bilancia sarà:

$$V\rho g \cdot 10 = m_1 g \cdot h + m_2 g \cdot l + m_3 g \cdot m + m_4 g \cdot n,$$

dove ρ è la densità del liquido. Semplificando e tenendo conto dei valori relativi delle masse dei cavalieri, si ottiene:

$$V\rho \cdot 10 = m_1 \cdot h + m_1 \cdot l + \frac{m_1}{10} \cdot m + \frac{m_1}{100} \cdot n$$

da cui, ricordando l'uguaglianza tra volume d'acqua spostato dall'immersore V e la massa del cavaliere m_1 , si ricava:

$$\rho = \frac{h+l}{10} + \frac{m}{100} + \frac{n}{1000} \quad (20)$$

relazione che permette, dalla sola lettura delle posizioni dei cavalieri sulla bilancia in equilibrio, di ottenere la densità del liquido in cui l'immersore è stato posto. In virtù della condizione fondamentale per la bilancia di Mohr-Westphal, l'unità di misura della densità così trovata è g/cm^3 .

La bilancia di Mohr-Westphal è tarata per l'acqua distillata a 18°C , pertanto a seconda della temperatura, in cui viene condotta l'esperienza, si

potrebbe avere un errore sistematico in tutte le misure. Occorre dunque determinare un coefficiente di correzione k per la bilancia, il cui valore è dato dal rapporto tra il valore corretto della densità dell'acqua alla temperatura t di esperienza (tab. 1) e il valore di densità indicato dalla bilancia all'equilibrio con l'immersore posto nell'acqua.

Per ottenere i valori corretti delle densità degli altri liquidi valutati con la stessa bilancia, bisognerà moltiplicare i risultati ottenuti dallo strumento per il fattore di correzione k .

Lo stalagmometro in uso è costituito da un corto tubo, o cannello, di vetro che termina con una sezione allargata ben levigata (fig. 16). Nello stalagmometro è possibile far entrare, aspirandolo dall'estremo superiore del tubo, il liquido da studiare. Il liquido, rilasciato, scende formando delle gocce, che escono dall'estremo inferiore. La tensione superficiale del liquido può essere ottenuta sulla base della relazione stabilita da Tate tra la massa della goccia, che si stacca dallo stalagmometro e la tensione superficiale del liquido.

Tale relazione stabilisce l'identità tra il peso di una goccia mg e la forza $\tau \cdot \pi \cdot d$ dovuta alla tensione superficiale applicata al contorno della sezione circolare secondo l'equazione (19) ovvero $m \cdot g = \tau \cdot \pi \cdot d$, con d diametro di distacco circolare della goccia, da cui si ottiene: $\tau/m = g/(\pi \cdot d)$.

Per un cannello di forma adeguata (larga e liscia sezione finale, come nello stalagmometro, per cui l'angolo di raccordo tra liquido e cannello è nullo), il diametro della sezione di distacco della goccia è praticamente costante per tutti i liquidi, quindi il rapporto τ/m risulta indipendente dal liquido. Ciò permette di ottenere, per confronto, la tensione superficiale (τ_2) di un liquido nota la tensione superficiale (τ_1) di un liquido di riferimento (acqua distillata) secondo la relazione:

$$\frac{\tau_2}{m_2} = \frac{\tau_1}{m_1}, \quad (21)$$

una volta note le masse m_1 e m_2 di una goccia dei due liquidi. Un modo per farlo consiste nel cosiddetto metodo dello stalagmometro a volume. Si sfrutta un rigonfiamento nella parte superiore del cannello dello stalagmometro, il cui volume V è delimitato da due segni incisi sul cannello. Riempito con i

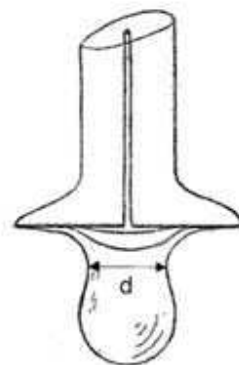


Figura 16: Dettaglio del cannello terminale inferiore dello stalagmometro, dove si formano le gocce.

due liquidi il rigonfiamento, si contano i numeri n_1 e n_2 di gocce necessari per svuotarne il volume V . Le masse di una goccia dei due liquidi possono essere trovate sulla base delle densità rispettive $m_1 = V \cdot \rho_1 n_1$ e $m_2 = V \cdot \rho_2 n_2$. Sostituendo queste relazioni per m_1 e m_2 nella equazione (21) si ottiene:

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{n_1}{n_2}. \quad (22)$$

Quest'ultima relazione consente di ottenere il valore della tensione superficiale dalla misura delle densità dei due liquidi (mediante l'uso della bilancia di Mohr-Westphal), dai valori dei numeri di gocce n_1 e n_2 e da quello della tensione superficiale del liquido di riferimento (acqua vedi Tab. 1).

Stima delle incertezze

A priori

La stima a priori dell'errore sulla tensione superficiale è dato da:

$$\frac{\delta\tau_2}{\tau_2} = \frac{\delta\tau_1}{\tau_1} + \frac{\delta\rho_2}{\rho_2} + \frac{\delta n_1}{n_1} + \frac{\delta\rho_1}{\rho_1} + \frac{\delta n_2}{n_2},$$

dove l'errore su $\delta\tau_1$ è dato dal numero di cifre significate in tabella. $\delta\rho_1$ e $\delta\rho_2$ si deducono dalla sensibilità della bilancia e l'incertezza sul numero di gocce contate possiamo assumere di 1 per entrambe le misure.

A posteriori

A posteriori non abbiamo misure ripetute, per cui gli errori dovrebbero essere calcolati sulla base delle considerazioni fatte a priori.

T (°C)	ρ (g/cm ³)	τ (dine/cm)	T (°C)	ρ (g/cm ³)	τ (dine/cm)
0	0.999868	75.49	16	0.998970	73.11
1	0.999927	75.34	17	0.998801	72.96
2	0.999968	75.20	18	0.998622	72.82
3	0.999992	75.06	19	0.998432	72.66
4	1.000000	74.90	20	0.998230	72.53
5	0.999992	74.75	21	0.998019	72.37
6	0.999968	74.60	22	0.997797	72.22
7	0.999929	74.45	23	0.997565	72.08
8	0.999876	74.30	24	0.997323	71.93
9	0.999808	74.15	25	0.997071	71.78
10	0.999727	74.01	26	0.996810	71.63
11	0.999632	73.86	27	0.996539	71.48
12	0.999525	73.70	28	0.996259	71.33
13	0.999404	73.56	29	0.995971	71.18
14	0.999271	73.41	30	0.995673	71.03
15	0.999126	73.26	31	0.995366	

Tabella 1: Densità dell'acqua distillata (ρ) e tensione superficiale (τ) a varie temperature.

0.9 Misura di v_{term} di dischi e sfere in condizioni di similarità dinamica

Materiale necessario

Calibro, micrometro di Palmer, bilancia, ampolle graduate, viscosimetro di Ostwald, cronometro, recipiente cilindrico, fluido viscoso, dischetti di vario materiale e dimensioni.

Premessa

L'equazione di Navier-Stokes può essere resa adimensionale a seguito dello *scaling* delle variabili rispetto a valori caratteristici del fenomeno studiato. Nell'equazione adimensionale risultante compare, quale unico coefficiente numerico, il numero di Reynolds Re , che congloba in sé sia le caratteristiche del moto (scala di lunghezza e di velocità) che del fluido (densità e viscosità). Ciò significa che, per lo stesso valore di Re e con le stesse condizioni iniziali e al contorno, le soluzioni dell'equazione adimensionale sono le stesse, anche se le caratteristiche del moto e del fluido variano. Ciò si chiama *similarità dinamica*: i flussi che ammettono lo stesso valore del numero di Reynolds sono dinamicamente simili. Il numero di Reynolds compare anche nella forma del coefficiente di drag C_D che indica la forza che si oppone al moto di un corpo in un fluido. Scopo dell'esperienza è graficare, per i vari dischetti, la relazione che lega C_D a Re .

Esecuzione

La prima cosa da fare è determinare la viscosità del fluido (soluzione di glicerina) tramite il viscosimetro di Ostwald. Siccome il tempo necessario è piuttosto lungo (20-30 minuti circa) conviene riempire subito il viscosimetro. Ugualmente si misura la densità del fluido pesandone un quantitativo noto (in una ampolla graduata) con la bilancia.

La viscosità si determina la formula

$$\mu = \mu_o \frac{\rho_f t_f}{\rho_o t_o},$$

dove μ_o è la viscosità dinamica, t_o il tempo di deflusso nel viscosimetro e ρ_o la densità del fluido di riferimento (in questo caso acqua distillata a 20 °C), ρ_f la densità del fluido incognito e t_f il suo tempo di deflusso.

Si procede poi a misurare le caratteristiche dei dischi: diametro (con il calibro), spessore (con il Palmer) e massa (con la bilancia).

Tramite le pinzette si lasciano cadere i diversi dischi nel liquido, il più possibile paralleli alla superficie del fluido: viste le caratteristiche in gioco, i dischi raggiungono la velocità terminale molto presto. Per ogni disco si misura la velocità, cronometrando il tempo di caduta dei dischi tra le due tacche evidenziate sul recipiente trasparente. A questo punto si hanno tutti i dati per calcolare i numeri richiesti, e graficarli assieme ai loro errori, secondo le formule seguenti:

$$C_D = \frac{2gQ(\rho - \rho_f)}{\rho_f V^2 S} \quad Re = \frac{VD\rho_f}{\mu},$$

dove g è l'accelerazione di gravità, Q il volume dell'oggetto, ρ la densità dell'oggetto, ρ_f la densità del fluido, V la velocità terminale dell'oggetto, D il diametro dell'oggetto, S la sezione dell'oggetto rispetto alla direzione del flusso e μ la viscosità del fluido.

In figura 0.9 viene riportato l'andamento atteso per C_D in funzione di Re , si osservi che tale andamento dipende dal tipo di forma dell'oggetto. Ma nel caso di bassi numeri di Reynolds si ha una dipendenza descrivibile con andamento iperbolico.

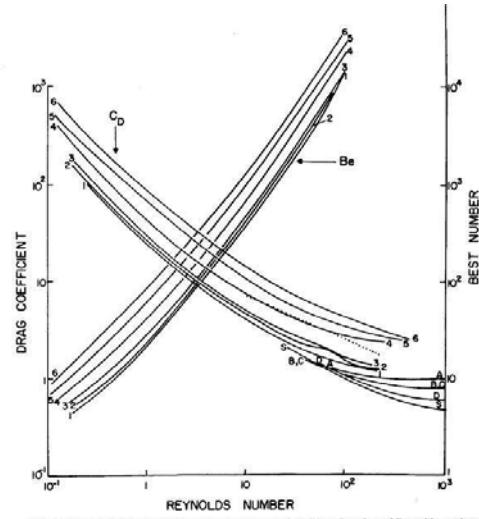


Fig. 3. Drag coefficients and Best numbers of snow crystal models as functions of Reynolds number: 1 disc, 2 hexagonal plate, 3 broad-branched crystal, 4 stellar crystal with plates, 5 dendrite, 6 stellar crystal; A 90° cone-spherical sector, B 70° cone-spherical sector, C 90° cone-hemisphere, D 90° needle, E sphere. The drag coefficients for the sphere are from Wieselsberger (1922). The dotted line representing stars with narrow or broad arms and plates with outgrowths is from Podzimek (1968).

Analisi degli errori

Errori a priori

La stima degli errori a priori sul C_D e Re si ottiene dalla propagazione degli errori delle varie grandezze misurate direttamente e/o indirettamente.

Errori a posteriori

A posteriori, avendo solo valutazioni degli errori relativi agli strumenti, gli errori risulteranno secondo la relazione ottenuta a priori.

Si potrebbe però, una volta riportati i risultati su un grafico $C_D = C_D(Re)$ con i rispettivi errori, verificare in quale intervallo di numeri di Reynolds si possa accettare la relazione attesa.

0.10 Correzione alla legge di Stokes (Millikan)

Premessa

L'esperienza di Millikan, nota per aver permesso l'osservazione della quantizzazione della carica elettrica ed una prima misura del suo valore, sfrutta la dinamica di un corpo in un mezzo viscoso. In particolare il corpo risulta essere una gocciolina d'olio e il mezzo l'aria. Millikan osservò che le goccioline d'olio (cariche per strofinio con l'aria) fornivano come risultato una carica elementare, che variava inversamente rispetto alle dimensioni della goccia.

L'effetto attribuito fu attribuito al fatto, che nel descrivere la caduta della goccia si usa la legge di Stokes, che è valida per i mezzi continui. Invece la goccia risulta di due ordini di grandezza superiore al libero cammino medio nell'aria, pertanto le gocce avvertono la "granulosità" dell'aria. Millikan apportò una correzione empirica e ne verificò la validità, evacuando il volume, dove si osservano le gocce (il libero cammino medio è inversamente proporzionale alla pressione).

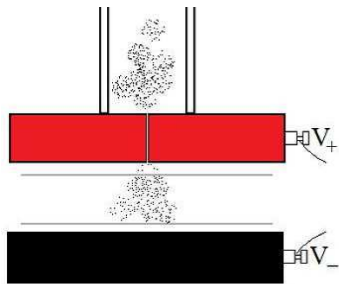


Figura 17: Schema della celletta per esperienza di Millikan. In rosso (V_+) ed in nero (V_-) armature a distanza d , in giallo le due linee di traguardo a distanza l .

Nell'esperienza proposta, si sfrutterà il fatto che le goccioline prodotte dal nebulizzatore hanno dimensioni diverse, pertanto, dato che la correzione dipende dal rapporto tra dimensioni della gocciolina e libero cammino medio, si può studiare lo stesso tipo di andamento osservato da Millikan.

L'apparato indicato schematicamente in figura 17 è costituito da due armature tra le quali si nebulizza dell'olio e si osserva il comportamento delle gocce d'olio con un microscopio.

Le armature possono essere tenute ad una tensione costante fornita da un alimentatore. Quindi si distingueranno due fasi, la prima relativa alla caduta libera della gocciolina senza l'applicazione di una tensione (alimentatore spento) la seconda con la stessa gocciolina in fase di risalita con l'alimentatore spento.

Si descriverà prima il moto della gocciolina, assumendo che la legge di Stokes sia valida, eppoi si applicherà la correzione empirica, e si riformuleranno tutte le equazioni necessarie con tale correzione.

Gocciolina in caduta in aria

Per descrivere il comportamento di una gocciolina in caduta libera, si individuano le forze, che agiscono su essa: forza di gravità ($\mathbf{F}_g$), spinta di Archimede ($\mathbf{F}_a$) e forza di attrito viscoso ($\mathbf{F}_v$) (fig. 18 (a)).

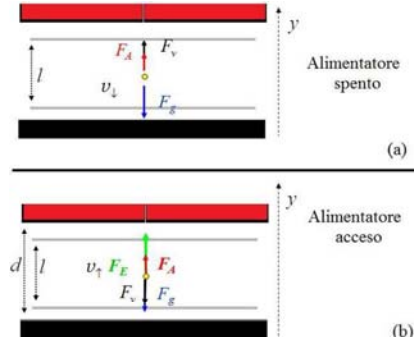


Figura 18: (a)— Forze che agiscono su una gocciolina di olio in caduta libera (alimentatore spento). (b)— Forze agenti in risalita (alimentatore acceso) .

l'aria (Pa·s (SI) o poise (cgs)), r' raggio della gocciolina d'olio. Le masse dell'olio e dell'aria si possono ottenere dalle rispettive densità ρ_o e ρ_a secondo la relazione $\rho = m/V$, dato che il volume occupato dalla gocciolina è una sfera si ricava $m = \rho \cdot 4/3\pi r'^3$.

Si ottiene infine:

$$\frac{4}{3}\pi r'^3 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g = 6\pi\eta r' v_{\downarrow}. \quad (23)$$

È possibile ricavare il raggio r' della goccia, esplicitando $v_{\downarrow} = l/t_{\downarrow}$, dove l è lo spazio percorso tra traguardi nel tempo $t_{\downarrow}$:

$$r' = \sqrt{\frac{9\eta l}{2 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g}} \cdot \sqrt{\frac{1}{t_{\downarrow}}}. \quad (24)$$

Goccia soggetta ad un campo elettrico

Le gocce d'olio vengono prodotte da un nebulizzatore, e sono cariche elettricamente. Se si applica alle armature una differenza di potenziale ΔV sufficiente a far risalire una goccia, assumendo che abbia una carica q' , essa

In condizioni di regime (le forze si equilibrano) l'accelerazione risulta nulla:

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_v = 0.$$

Le forze hanno componenti solo lungo l'asse y e se orientato come in figura 18:

$$-F_g + F_A + F_v = 0,$$

Esplicitiamo le forze $F_g = m_o g$, $F_A = m_a g$ e $F_v = 6\pi\eta r' v_{\downarrow}$, dove m_o massa della gocciolina d'olio, m_a la massa d'aria (rimossa dal volume occupato dalla goccia), η viscosità del-

sarà soggetta anche ad una forza elettrica $\mathbf{F}_E = q'\mathbf{E}$. In condizioni di regime la seconda legge di Newton risulta (fig. 18) :

$$\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_v = 0.$$

Dato che in modulo $F_E = q'\Delta V/d$ (d distanza tra le armature), si può riscrivere l'equazione scalare lungo y :

$$\frac{q'\Delta V}{d} - \frac{4}{3}\pi r'^3 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g - 6\pi\eta r'v_{\uparrow} = 0 \quad (25)$$

Si osservi che il secondo termine a primo membro dell'equazione (25), dato che si tratta della stessa gocciolina descritta nella fase di discesa, può essere sostituito con l'equazione (23), pertanto si ottiene:

$$q' = \frac{6\pi\eta r'd}{\Delta V}(v_{\uparrow} + v_{\downarrow}),$$

esplicitando le velocità in funzione della distanza tra i traguardi (l) e i rispettivi tempi di discesa e salita si ha:

$$q' = \frac{6\pi\eta r'dl}{\Delta V} \left(\frac{1}{t_{\uparrow}} + \frac{1}{t_{\downarrow}} \right). \quad (26)$$

La carica della gocciolina può essere espressa in numero di cariche elementari ovvero $n' = q'/e$ dove $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C è la carica elementare espressa in Coulomb (SI).

Millikan, mediante una sorgente a raggi X induceva una variazione della carica della goccia, ed osservò che tali variazioni avvenivano per un multiplo di un valore fissato, noto oggi come quanto di carica.

Ma osservò che la misura risultava maggiore per goccioline di raggio minore.

Correzione alla legge di Stokes

La sua considerazione fu che la legge di Stokes, valida per mezzi continui andava “adattata” alla situazione sperimentale.

Questo implica anche un'abilità nel calcolo. Il numero ottenuto dal rapporto q'/e dovrebbe essere un intero, quindi si arrotonda n' all'intero più vicino. La misura della carica quantizzata, che indicheremo con e' , utilizzando la formula non corretta risulterà $e' = q'/n$

$$e' = \frac{q'}{n} = \frac{6\pi\eta r'dl}{\Delta V \cdot n} \left(\frac{1}{t_{\uparrow}} + \frac{1}{t_{\downarrow}} \right), \quad (27)$$

dove si ribadisce che n è ottenuto dall'aver imposto che la carica totale sulla goccia sia un multiplo intero di un unità fondamentale e' , che si ottiene dall'applicazione della legge di Stokes.

L'adattamento "empirico" della legge di Stokes segue un modello atomico dell'aria per cui nel caso in cui il libero cammino (λ) (lo spazio medio percorso prima che una molecola urti con un'altra) è maggiore delle dimensioni della goccia, questa sarà frenata di meno, al contrario di quando il libero cammino medio è minore. Quindi si individua una relazione funzionale del tipo:

$$\tilde{F}_v = \frac{F_v}{1 + A \frac{\lambda}{r}},$$

che descriva tale modello.

Infatti per $\lambda/r \rightarrow 0$ si ha $\tilde{F}_v \rightarrow F_v$ - ovvero nel caso di un mezzo continuo si ha la legge di Stokes, per $\lambda/r \rightarrow \infty$ si ha $\tilde{F}_v \rightarrow 0$ - la gocciolina è nel vuoto, dove infatti non si ha alcun frenamento per viscosità. Una volta che il modello segue il comportamento macroscopico, il resto ne consegue come calcolo matematico. Per semplicità assumeremo $A = 1$ (interessa l'andamento al limite portarsi dietro A è non necessario). Dato che il rapporto λ/r è molto piccolo, si può approssimare al primo ordine dello sviluppo di Taylor:

$$\frac{6\pi\eta r v}{1 + \frac{\lambda}{r}} \stackrel{Taylor}{\approx} (6\pi\eta r v) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)$$

Riscrivendo l'equazione 23 con la legge di Stokes corretta ed approssimata, si ottiene nel caso di caduta libera

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g = 6\pi\eta r v_{\downarrow} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) \quad (28)$$

dove si indica con r il raggio della gocciolina invece di r' , usato per il calcolo senza correzione.

Dall'equazione (28) si ottiene per il raggio della gocciolina:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_{\downarrow}}{2 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda}{r}}.$$

Si sostituisce in (28) r' , un valore ricavato (misurabile) nell'equazione (23). Questa risulta quindi un valore più corretto per il raggio e lo si utilizza anche nel rapporto λ/r , che diventerà λ/r' :

$$r = r' \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda}{r'}}. \quad (29)$$

Se si applica la correzione alla legge di Stokes anche nella fase di risalita della gocciolina, l'equazione (25) va riscritta:

$$\frac{q\Delta V}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot (\rho_o - \rho_a) \cdot g - 6\pi\eta r v_{\uparrow} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) = 0,$$

se si utilizza la relazione (28) si ha:

$$q = \frac{6\pi\eta d}{\Delta V} (v_{\uparrow} + v_{\downarrow}) \cdot r \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right),$$

si utilizzi prima la relazione $r=r(r')$ (equ. (29):

$$q = \frac{6\pi\eta d}{\Delta V} (v_{\uparrow} + v_{\downarrow}) \cdot r' \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r'}\right)^{3/2},$$

si osservi che anche in questo caso nel rapporto λ/r si è sostituito il raggio misurato r' .

Si osservi che a secondo membro si può sostituire q' ricavato in (26) e che si può misurare:

$$q = q' \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r'}\right)^{3/2},$$

e dividendo entrambi i membri per n si ottiene:

$$e = \frac{q}{n} = e' \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r'}\right)^{3/2}, \quad (30)$$

dove a secondo membro si ha $e' = q'/n$ ed e sarebbe quindi il valore corretto della carica elementare che si può ottenere dalla misura di e' .

Estrazione del valore corretto di e

Sia nell'equazione (28) che nella (30) non è noto λ (o meglio $A\lambda$). Per poter individuare la miglior stima di e si osserva che la (30) può essere riscritta

$$e^{2/3} = e'^{2/3} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{r'}\right)$$

ed ancora

$$\frac{e^{2/3}}{1 - \frac{\lambda}{r'}} = e'^{2/3}.$$

Nonché invertendo i membri e con uno sviluppo in polinomi di Taylor:

$$e'^{2/3} = \frac{e^{2/3}}{1 - \frac{\lambda}{r'}} \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} e^{2/3} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{r'}\right)$$

Si osservi che si è giunti ad una relazione lineare del tipo $y = A + Bx$ in cui $y \equiv e'^{2/3}$ ed $x \equiv 1/r'$, per cui i risultati dovrebbero essere del tipo in figura 19.

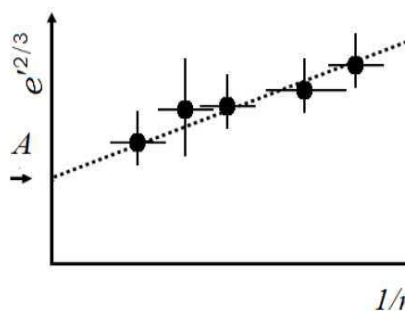


Figura 19: Grafico di $e'^{2/3}$ in funzione di $1/r'$. Sul grafico è riportata anche l'intercetta della retta con l'asse y (A).

Dal confronto si osserva che l'intercetta A con l'asse delle ordinate è $A = e'^{2/3}$, da cui è possibile ricavare e ed anche l'errore sulla misura.

Esecuzione

Si deve ottimizzare il sistema microscopio per poter mettere a fuoco il centro della celletta, mediante un filo inserito *ad hoc*, e nello stesso tempo le due bande che individuano i traguardi. Si estrae il filo e si nebulizza l'olio, si accende e spegne l'alimentatore alcune volte, dan-

do un'occhiata globale. Si sceglie una goccia e si cerca di farle fare un certo numero di volte su e giù, segnalando ad un collega che cronometra stop/start sia nella fase di discesa che in quella di salita. Si hanno in questo modo per gocce diverse i tempi di salita e discesa. Dato che si deve trovare un andamento in funzione di $1/r'$, di dovrebbe cercare di studiare gocce che abbiano tempi di discesa diversi.

Stima degli errori

Per gli stimare gli errori consideriamo per la misura di r' l'equazione (24) riscritta nel modo seguente:

$$r' = cost_r \sqrt{\frac{1}{t_{\downarrow}}},$$

dove la $cost_r$ risulta la stessa per ogni goccia, e tutte le grandezze da cui dipende si ritengano non affette da errore (η , ρ_a , g dal manuale CRC [?], l ρ_o misurate), invece per $t_{\downarrow}$ si assuma come errore la deviazione standard, quindi per l'errore su r' :

$$\delta r' = \left| \frac{\partial r'}{\partial t_{\downarrow}} \right| \delta t_{\downarrow}$$

Si tenga conto che per la relazioni lineare si deve riportare sul grafico ed utilizzare per la regressione lineare l'errore su x che equivale a calcolare l'errore su $1/r'$.

Stessa considerazione si fa sull'errore su e' , sempre semplificando l'equazione (27) nel seguente modo

$$e' = \frac{q'}{n} = \frac{\text{cost}_q}{n} \cdot r' \left(\frac{1}{t_{\uparrow}} + \frac{1}{t_{\downarrow}} \right),$$

dove anche in questo caso la cost_q (d e ΔV misurate) risulta la stessa per ogni goccia. Pertanto si ha:

$$\delta e' = \left| \frac{\partial e'}{\partial r'} \right| \delta r' + \left| \frac{\partial e'}{\partial t_{\downarrow}} \right| \delta t_{\downarrow} + \left| \frac{\partial e'}{\partial t_{\uparrow}} \right| \delta t_{\uparrow}.$$

Anche in questo caso si tenga conto che per lo studio della relazione tra e' e r' si deve calcolare l'errore su y che equivale a $e'^{2/3}$. Lo studio prevede soprattutto la verifica del $\tilde{\chi}^2$, per stabilire quanto la relazione lineare descriva i dati sperimentali. Si può inoltre fornire l'estrazione della miglior stima di e con rispettivo errore dedotto dal parametro A della regressione lineare mediante il metodo dei minimi quadrati.

0.11 Calibrazione di una termocoppia

Premessa

La coppia termoelettrica (o termocoppia) è costituita da fili di due metalli (A e B) diversi, collegati in modo da formare due giunzioni, come schematicamente rappresentato in figura 20. Se le due giunzioni si trovano a temperature diverse (t e t_0), nella termocoppia si genera una forza elettromotrice (f.e.m.) E (effetto Seebeck o termoelettrico). Poiché la f.e.m. dipende dalla differenza tra le temperature delle due giunzioni, grazie a tale proprietà termometrica, la termocoppia fornisce la misura della temperatura. In particolare se una delle giunzioni viene mantenuta a una temperatura fissa di riferimento t_0 , usualmente quella di un bagno di acqua e ghiaccio fondente, la f.e.m. E sarà funzione soltanto della temperatura t dell'altra giunzione, che viene posta nell'ambiente di cui si vuol conoscere la temperatura.

La f.e.m. E dipende, oltre che dalla differenza tra le temperature delle giunzioni, anche dai metalli della coppia. Coppie di metalli diversi vengono usati in diversi intervalli di temperatura. Termocoppie di uso comune sono indicate con una lettera e sono costituite da:

Tipo	conduttore positivo	conduttore negativo	Temperatura di utilizzo °	sensibilità [$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$]
J	Ferro Fe	Costantana Cu+43 % Ni	-270÷400	53
K	Chromel Ni+10 %Cr	Alumel Ni+2%Al+2%Mn+1%Si	-270÷1372	~ 41
T	Rame Cu	Costantana Cu+43 % Ni	-270÷400	43

Tabella 2: Termocoppie in uso nel laboratorio: conduttori positivo e negativo, Temperatura di utilizzo e sensibilità media nell'intervallo 0–100 °C [?]

Il termometro a termocoppia viene spesso usato, poiché possiede considerevoli proprietà, tra cui un grande prontezza, un'alta stabilità e una piccola capacità termica. Per l'impiego della coppia termoelettrica come termometro occorre eseguire la sua calibrazione, ovvero trovare che relazione esiste tra la forza elettromotrice E della termocoppia e la temperatura t che la determina. Scopo di questa esperienza è quello di ottenere la calibrazione di una coppia nell'intervallo di temperatura 0–100 °C, mediante uno schema di principio come presentato nella figura 20

Esecuzione

Per eseguire l'esperienza, la prima giunzione della termocoppia è immersa in un bagno di acqua e ghiaccio fondente, la seconda è posta nell'acqua contenuta in un bagno termostatico, in cui un apposito agitatore minimizza i gradienti termici. Il bagno termostatico procede al riscaldamento dell'acqua in esso contenuta, la cui temperatura viene rilevata con un apposito termometro a mercurio. Contemporaneamente si rileveranno i valori della f.e.m. della termocoppia con un voltmetro elettronico (fig. 20). I risultati

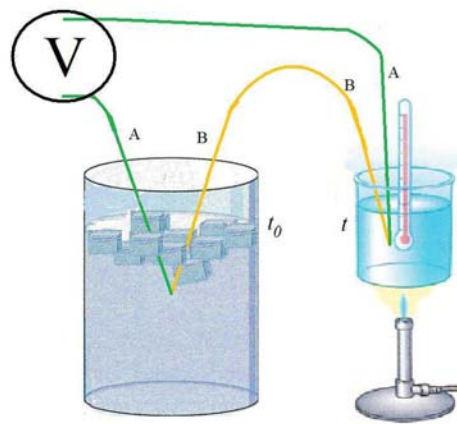


Figura 20: Schema dell'esperienza per la calibrazione di una termocoppia: giunzione a freddo in ghiaccio fondente a t_0 , giunzione a caldo in un bagno termostato a t variabile. Voltmetro (V) per la misura della forza elettromotrice E .

vanno presentati sia in forma tabulare che in forma grafica. In quest'ultimo caso le misure di f.e.m. (in mV) vengono riportate in funzione della temperatura della seconda giunzione (in $^{\circ}\text{C}$). Sia la tabella che il grafico possono essere già considerate come un'utile calibrazione della termocoppia, nel senso che permettono di collegare ogni valore di f.e.m. a un valore di temperatura, e rendono quindi utilizzabile la coppia termoelettrica come termometro, ma una più precisa calibrazione tra le due grandezze richiede l'individuazione della migliore relazione analitica tra f.e.m. (E) e temperatura (t). Si può ipotizzare dapprima una relazione lineare tra le due grandezze:

$$E = c_0 + c_1 \cdot t.$$

Con il metodo dei minimi quadrati applicato alla regressione lineare si possono trovare i valori dei parametri c_0 e c_1 (con i rispettivi errori). Per valutare

l'adeguatezza della relazione lineare trovata a descrivere l'effettivo legame fra le grandezze, occorre calcolare il coefficiente di correlazione r , o quello di determinazione r^2 . Un'altra ipotesi da fare è che invece tra le due grandezze sussista una relazione polinomiale di secondo grado:

$$E = c'_0 + c'_1 \cdot t + c'_2 \cdot t^2.$$

Anche in questo caso il metodo dei minimi quadrati (applicato alla regressione parabolica) permette di trovare i valori dei parametri c'_0 , c'_1 e c'_2 . Inoltre si calcolerà il coefficiente di correlazione r' per tale relazione. Questi calcoli possono essere proficuamente effettuati, servendosi di un apposito programma di calcolo (specie nel caso di correlazione polinomiale). Il procedimento può eventualmente essere ripetuto con le stese modalità ipotizzando relazioni polinomiali di ordine superiore. Infine, il confronto tra i coefficienti di correlazione e la verifica del $\tilde{\chi}^2$ permette di valutare, quale degli andamenti descrive meglio i dati sperimentali, e quindi di esprimere la relazione di calibrazione della coppia termoelettrica analizzata. Nel manuale "Handbook of Chemistry and Physics" [?] vengono riportate le f.e.m. in corrispondenza di varie temperature e i polinomi di ordine 10.

Valutazione dell'errore

Spesso nei testi di laboratorio dei primi anni si afferma, impropriamente, che di solito le misure in un laboratorio di fisica sono poco precise, concedendo spazio a "libertà" nel condurre in modo grossolano le esperienze. Questo è uno tra i casi in cui la precisione del voltmetro è notevole e il trattamento dei dati mediante la verifica del $\tilde{\chi}^2$, può creare qualche sbandamento allo studente. Tale esperienza risulta di facile conduzione, ma richiede l'utilizzo della teoria degli errori con ben ponderate considerazioni.

Errore massimo a priori

Nella valutazione degli errori a priori si osserva che la f.e.m. viene letta da un multimetro e che dal riferimento [?], dato che c_0 risulta pari a 0, si avrà che l'errore sulla temperatura, se assumiamo una dipendenza lineare, sarà dato dalla precisione con cui possiamo rilevare la E .

Da $E \sim c_1 t$, $\delta E = c_1 \delta t$ e quindi $\delta E/E \sim \delta t/t$.

Per il caso di una relazione polinomiale di 2° ovvero se $E = c'_0 + c'_1 t + c'_2 t^2$, risulta $\delta E = c_1 \delta t + 2 \cdot c'_2 \cdot t \delta t$ anche in questo caso dipende dalla precisione con cui misuriamo la forza elettromotrice, si osservi infatti che l'errore massimo $\delta E/E \sim (c'_1 + 2c'_2 t)/(c'_1 + c'_2 t) \cdot \delta t/t$, sia ha per temperature elevate a $2\delta t/t$ (per $t=0$ invece $\delta t/t$).

A posteriori

Nel trattare i dati e trovare la relazione funzionale del tipo si faccia attenzione che la variabile t indipendente viene misurata con un termometro con una data risoluzione, ovvero avremo un errore sulle ascisse anche di maggiore entità rispetto all'errore sulle ordinate (E).

In questo caso possiamo utilizzare l'errore equivalente ovvero $\delta_E(equiv) = dE/dt \cdot \delta t$ che va, sommato in quadratura all'errore sulle E dovuto alla sensibilità di lettura dello strumento.

Questa considerazione vale sia per il caso di relazione lineare che per il caso di relazione polinomiale.

0.12 Misura del calore specifico di un solido

Premessa

Per calore specifico di un materiale si intende la quantità di calore, che bisogna fornire all'unità di massa di un materiale per innalzare la sua temperatura di un grado centigrado ($^{\circ}\text{C}$) o kelvin (K). L'unità di misura del calore specifico nel SI è $\text{J/K} \cdot \text{kg}$. Un'unità di misura ancora molto usata è $\text{cal/}^{\circ}\text{C} \cdot \text{g}$, poiché la caloria (cal unità di misura del calore) è di immediato utilizzo, quando si fanno esperimenti con l'acqua ($1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$) distillata (di seguito si scriverà semplicemente acqua).

L'esperienza permette la misura del calore specifico c_x di un solido, riscaldato ad una temperatura T_1 , eppoi immerso in un bagno di acqua distillata alla temperatura T_0 (minore di T_1), all'interno di un recipiente termicamente isolato (calorimetro delle mescolanze di Regnault fig. 21). In tal caso il calore ceduto dal solido (Q_x) uguaglierà il calore assorbito dal sistema calorimetrico Q_C :

$$|Q_x| = Q_C$$

dove Q_x è preso in valore assoluto, in quanto il calore uscente dal corpo x è negativo (il calore entrante nel calorimetro è invece positivo). La legge fisica che correla la quantità di calore assorbito o ceduto è data dalla relazione:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

dove Q è il calore, m la massa del corpo, c il calore specifico del corpo e ΔT la variazione di temperatura del corpo stesso. Il prodotto mc è detto capacità termica del corpo di massa m e calore specifico c . Una volta inserito il corpo x nell'acqua la temperatura del solido e quella del sistema calorimetrico raggiungeranno una temperatura comune di equilibrio che indicheremo con T_{eq} .

Dall'equivalenza tra calore uscente dal corpo x e quello entrante nel

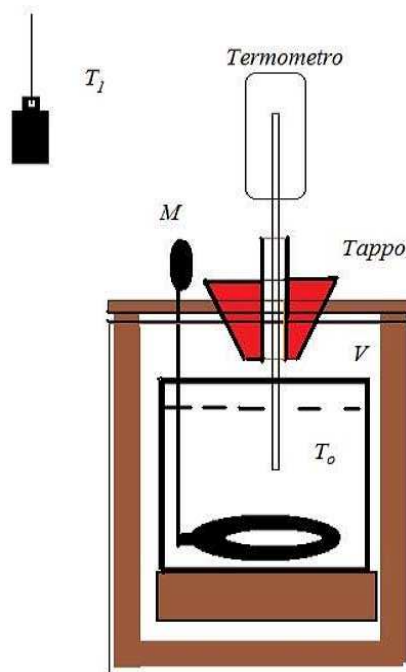


Figura 21: Calorimetro di Regnault.

sistema calorimetro si ottiene:

$$M_x \cdot c_x (T_1 - T_{eq}) = M_{sist} \cdot c_{sist} (T_{eq} - T_o), \quad (31)$$

dove c_x e M_x sono la massa ed il calore specifico (da determinare) del materiale, T_1 è la temperatura, alla quale è stato portato il solido prima di introdurlo nel bagno del calorimetro, T_o la temperatura dell'acqua subito prima dell'inserimento di M_x , T_{eq} la temperatura di equilibrio raggiunta dai due corpi. $M_{sist}c_{sist}$ è la capacità termica del sistema calorimetro. Tale quantità è data dalla somma delle capacità termiche di tutti i corpi, che costituiscono il calorimetro: il vaso calorimetrico, il miscelatore, il termometro e la massa d'acqua utilizzata $M_a c_a$.

$$M_{sist}c_{sist} = \sum_{i=1}^n M_i \cdot c_i + M_a \cdot c_a = m_{equiv} \cdot c_a + M_a \cdot c_a. \quad (32)$$

Bisogna quindi determinare sperimentalmente questa massa equivalente, mediante una procedura calibrazione del calorimetro. Tale procedura permetterà di sostituire $\sum_{i=1}^n M_i c_i$ con l'equivalente capacità termica di una opportuna quantità di acqua.

Si fa notare che si userà sempre l'equazione 32, nella quale si sostituirà $\sum_{i=1}^n M_i c_i$ con $m_{equiv}c_a$, capacità termica equivalente data m_{equiv} , per il calore specifico dell'acqua c_a .

Calibrazione del calorimetro

Si supponga di utilizzare un quantitativo m'_a di acqua scaldato ad una temperatura T'_1 e di inserirlo nel calorimetro, dove si trova una massa di acqua m_a alla temperatura T'_o . Si utilizzerà l'equazione 31, si individuano le temperature per questa procedura con l'apostrofo così anche la massa d'acqua (che indicheremo con la lettera miniscola (m_a), presente nel vaso calorimetrico calorimetro, l'equazione perciò diventa:

$$m'_a c_a (T'_1 - T'_{eq}) = (m_{equiv} + m_a) c_a (T'_{eq} - T'_o),$$

Dalla quale è immediato ricavare la massa equivalente in acqua m_{equiv} del calorimetro:

$$m_{equiv} = m'_a \frac{(T'_1 - T'_{eq})}{(T'_{eq} - T'_o)} - m_a \quad (33)$$

Ottenuta m_{equiv} , che possiamo determinare dalla misure dirette delle masse di acqua e delle temperature, si ritorna all'equazione 31 da cui si ottiene: $M_x c_x (T_1 - T_{eq}) = (m_{equiv} c_a + M_a c_a) (T_{eq} - T_o)$, quindi:

$$c_x = \frac{(m_{eq} + M_a)}{M_x} \frac{(T_{eq} - T_o)}{(T_1 - T_{eq})} c_a \quad (34)$$

Nelle considerazioni precedenti si è presupposto, che il calorimetro sia un sistema adiabatico, ovvero che non scambi calore con l'ambiente circostante. Invece si osserva che si ha un minimo scambio termico, ci sono vari modi per correggere l'eventuale non adiabaticità, ma ci limiteremo, per questo corso introduttivo, a interpolare in modo grafico le temperature misurate, per ottenere la temperatura di equilibrio subito dopo l'inserimento del corpo nel bagno di acqua.

Esecuzione

I procedimenti per l'esecuzione della misura sono simili sia per la calibrazione del calorimetro che per la misura del calore specifico di un corpo, per cui sarà sufficiente dare una descrizione dettagliata nel caso della calibrazione e meno per il caso della misura. Per entrambi è opportuno avere un'idea della quantità di acqua che può contenere il vaso per evitare che fuorisca nel calorimetro, per fare questo basta misurare con un calibro le dimensioni interne e calcolare il volume interno.

Inoltre è buona regola misurare anche la massa del vaso, anche se non utilizzata nel modo in cui si propone di condurre l'esperienza.

Calibrazione del calorimetro

Sono a disposizione dei contenitori graduati di vario tipo, sono fondamentali per la misura:

- 1° contenitore graduato a 70, 50 e 30 cc (utile per misura l'acqua da inserire nel vaso calorimetrico),
- 2° contenitore graduato 10, 20, 30 e 40 cc, con pezzi di guaina termica adesiva nera per prenderlo (per scaldare una piccola quantità di acqua).

Una volta verificato il volume di acqua che può contenere il vaso calorimetrico. Si riempia questo con quantità di acqua non inferiore a 120 ml (si usi il 1° contenitore con due pesate una 70 cc circa e l'altra da 50 cc circa). Questa quantità d'acqua è sufficiente per l'immersione del termometro e l'inserimento di almeno 20 cc di acqua calda.

Si prepari il 2° contenitore pieno a circa 40 cc acqua e lo si collochi sul fornello termostato a 150 °C ed aspettare che raggiunga la temperatura nell'intervallo 50-60 °C.

Dall'equazione 33 si osservi che è necessario misurare la massa di acqua messa nel calorimetro a temperatura ambiente m_a e la massa di acqua m'_a scaldata ad una temperatura T'_1 di circa 50-60 °C.

Si misuri la temperatura ogni 15 s, la temperatura dell'acqua nel calorimetro per qualche minuto.

Si versino circa 15-20 ml di acqua (attenzione a misurare la massa del contenitore pieno prima, misurare la temperatura subito prima di inserirla e a non superare la capienza stimata per il volume che può contenere il vaso calorimetrico, si ricordi inoltre di misurare la massa del contenitore subito dopo per avere la misura della massa d'acqua calda) e si misuri l'andamento della temperatura ogni 5 s, per avere il transiente e una volta raggiunta una temperatura più stabile ogni 15 s.

Il grafico riportato in figura 22 riporta l'andamento atteso.

L'inizio riporta la situazione prima dell'immersione, si rilevi la temperatura ogni 15" e si prenda come T_o , quella osservata come andamento limite subito prima dell'immersione. Si inseriscano circa 20 ml di acqua calda. Attenzione, si ribadisce, a misurare il contenitore con l'acqua prima e dopo l'inserimento, per sottrazione si ottiene direttamente m'_a . Dopo l'inserimento dell'acqua calda, la temperatura tenderà a salire, si provi a rilevare la temperatura ogni 5 secondi, poi una volta osservato un andamento de-

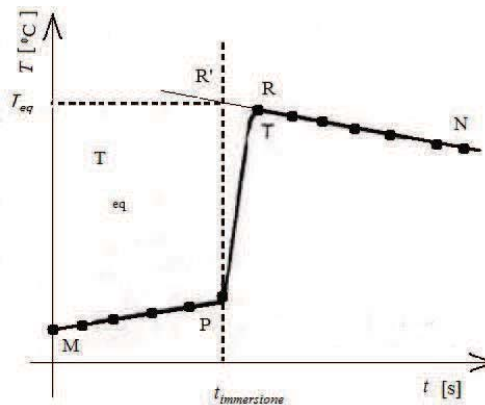


Figura 22: Andamento della temperatura del bagno termico nel calorimetro in funzione del tempo.

screscente si rilevi la temperatura ogni 15" per qualche minuto. Quello che bisogna ottenere è la retta MP, prima dell'inserimento dell'acqua calda e la retta RN dopo l'inserimento. Dal prolungamento della linea RN e la sua intersezione, con la parallela all'asse delle ordinate a partire dal punto P, si può ottenere la temperatura di equilibrio, da utilizzare nel calcolo, estrapolazione dall'andamento della retta RN. Dalla relazione 33 si ottiene così la massa equivalente in acqua del calorimetro.

Misura del calore specifico c_x

Si deve svuotare il calorimetro dell'acqua utilizzata e rifare tutto il procedimento e le nuove misure per il corpo, del quale si vuole determinare il calore specifico.

Si devono ripetere tutte le misure del riempimento e la misura della temperatura prima dell'inserimento del materiale di massa Mx . Si misuri la massa del corpo e poi lo si immerga nel tubo immerso a sua volta in un

bagno di acqua in ebollizione (vedere per la temperatura T_1 la tabella dell'ebollizione dell'acqua in funzione della pressione, per il 2010 si fornisce un sistema con la termocoppia per cui è possibile fare una misura di temperatura diretta).

Una volta inserito il materiale si ottiene un'altra curva tipo quella della figura 22, con le stesse considerazioni di sopra si ricava la nuova temperatura di equilibrio. Si utilizza l'equazione 34 per ricavare c_x .

Stima dell'errore sulla misura di c_x .

Errori a priori

Si osservi che l'errore su c_x può essere dedotto dalla propagazione degli errori applicata all'equazione 34. Si prenda come errore sulle misure di temperatura, quanto segnalato sul manuale del termometro o termocoppia. Si consideri l'errore di sensibilità di lettura (grado di precisione) e l'errore di accuratezza.

Per le misure di massa la sensibilità delle bilancia.

Ovviamente per l'errore sulla massa equivalente bisogna propagare l'errore secondo l'equazione 33 con le stesse considerazioni di cui sopra. L'errore sarà la somma dei rispettivi errori massimi a priori.

In entrambe le equazioni suddette si osservi che compare sempre una differenza tra temperature. In questo caso se la misura viene effettuata con lo stesso strumento, per il caso di errori di accuratezza, dato che avranno sempre lo stesso segno dovrebbero cancellarsi.

Attenzione però nell'equazione 34, se la temperatura di ebollizione dell'acqua viene presa da valori tabulati, allora bisogna tener conto dell'errore sulla misura di T_{eq} e quella dedotta dalle cifre significative del dato preso.

Diversamente utilizzando una termocoppia per tutte le misure (calibrata ...) anche per la temperatura di ebollizione Tali errori si elidono. Potrebbe essere un buon esercizio, calibrare la termocoppia e controllare se veramente si ottiene lo stesso risultato tenendo conto anche dell'errore sull'accuratezza.

Errori a posteriori

Ovviamente a posteriori, si osserva che le temperature si deducono dalla regressione lineare tra le due rette e l'estrapolazione della temperatura di equilibrio. Per l'esperienza da condurre nel corso dei turni di laboratorio, ci limiteremo alla sola analisi grafica.

Per la derivazione della temperatura di equilibrio, in entrambi i casi, si

potrebbe ricavare anche con il metodo dei minimi quadrati e quindi fornire l'errore ottenuto anche da tale derivazione.

0.13 Strumentazione per le esperienze sul suono

Generatore di funzioni (Oscillatore)

Si chiama oscillatore un circuito elettrico che oscilla in opportune condizioni; vale a dire, quando si altera l'equilibrio del circuito, esso genera una corrente oscillante. Tuttavia, con il nome di oscillatore o con il sinonimo di “generatore di funzioni” (FG — Function Generator) si indica anche lo strumento destinato a generare un segnale elettrico periodico di frequenza, ampiezza e forma d'onda desiderate. A seconda della forma d'onda si hanno generatori di onde sinusoidali, quadre, triangolari, di rampa (dente di sega), ecc. È possibile pilotare il generatore per sincronizzarne il segnale, modularlo in ampiezza e frequenza e variarne la forma d'onda. Un FG tipicamente può generare in uscita segnali con frequenze da 10^{-2} Hz a 10^7 Hz. La frequenza è regolata da un moltiplicatore a scatto o da una serie di pulsanti e da una manopola a disco.

Contatore

Il contatore elettronico (Pulse Counter) è uno strumento destinato sia alla misura della durata di impulsi periodici che al conteggio di eventi, di qualsiasi natura, associabili ad impulsi elettrici. Un impulso, di tensione o di corrente, è un segnale, che si esaurisce in un tempo molto breve: da qualche microsecondo ad un secondo. Ad esso può essere associata un'informazione relativa alla sua localizzazione temporale, all'ampiezza, alla durata e alla forma. Un conveniente trasduttore (antenna, cellula fotoelettrica, rivelatore di radiazione o altro) trasforma l'evento in un impulso elettrico da applicare all'ingresso (gate) del circuito di conteggio. Qui, tramite opportuni circuiti integrati, che comandano il dispositivo di visualizzazione delle cifre (display), avviene la conversione del segnale in uscita nel numero contato. Un pulsante (*reset*) consente di azzerare le cifre segnate sul *display*. Un contatore elettronico può effettuare: conteggi dell'ordine di 10^6 a frequenze di 10^7 Hz, conteggi su intervalli di tempo da $0.1 \mu\text{s}$ fino a 10 s e misurare intervalli di tempo da 0.1 s a 10^7 s. Nel contatore di impulsi un oscillatore con segnale a frequenza nota accoppiato con un interruttore elettronico consente la misura dell'intervallo di tempo durante il quale si verifica un determinato evento. L'impulso applicato al contatore (all'inizio dell'evento) fa iniziare il conteggio ed un secondo impulso (alla fine) fa cessare il conteggio del numero di cicli dell'oscillatore. Se la frequenza di questo è f , l'intervallo di tempo risulta essere $t = N/f$, dove N è il numero segnato sul display. Prima di

iniziare l'operazione di conteggio è opportuno procedere alla campionatura o taratura della frequenza dell'oscillatore. Si determina, cioè, il valore medio del numero di impulsi al secondo ($n/\Delta t$), che l'oscillatore conta per k intervalli di tempo Δt (dell'ordine di qualche minuto) prefissati e misurati con un cronometro:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{\Delta t_i}}{k}$$

Oscilloscopio

Questo strumento (in sigla, CRO = Cathode Ray Oscilloscope) rende visibili su schermo, e quindi registrabili fotograficamente, le curve di variazione nel tempo di grandezze elettriche rapidamente variabili, anche se relative ad eventi transitori rapidissimi. Questa analisi è resa possibile mediante la composizione di due moti, il primo in funzione della grandezza in esame e l'altro in funzione del tempo. Il componente principale del CRO è costituito da un tubo a raggi catodici (CRT). In esso (fig. 23) un fascio di elettroni,

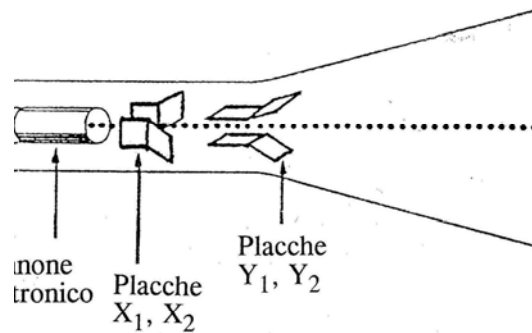


Figura 23: Schema di un oscilloscopio con i componenti principali.

emessi da un catodo riscaldato K, in un vuoto molto spinto, viene accelerato e focalizzato dal cannone elettronico al centro di uno schermo fluorescente S. Due tensioni, applicate a due coppie di “placche di deflessione”, disposte perpendicolarmente l'una rispetto all'altra (X_1, X_2 e Y_1, Y_2) consentono di controllare in senso orizzontale e verticale la direzione del fascio e quindi la posizione della macchia luminosa (*spot*) sullo schermo. La coppia orizzontale (Y_1, Y_2 : placche “verticali”) serve allo spostamento verticale del fascio, mentre la coppia verticale (X_1, X_2 : “placche orizzontali”) determina lo spostamento orizzontale. L'asse x (base dei tempi) è fornito da questa coppia. Le

due deviazioni, proporzionali alle tensioni applicate alle rispettive placche, costituiscono le componenti x e y della posizione dello *spot* sullo schermo. Non esistendo parti meccaniche in movimento (è il fascio di elettroni che si muove), ogni inerzia è assente e il pennello elettronico è l'indicatore ideale di ogni tensione variabile in modo rapido. Se alle placche non è applicata alcuna tensione, al centro dello schermo compare solo lo spot. Nell'uso del CRO questo non deve mai essere troppo luminoso, perché una eccessiva luminosità danneggia irreparabilmente lo schermo. La tensione $V(t)$ da analizzare è applicata, direttamente o tramite amplificazione, alle placche verticali (asse Y), mentre alle placche orizzontali si può applicare una tensione, fornita dal generatore di scansione, che cresce linearmente con il tempo. Lo spot traccia quindi una curva che rivela la variazione di $V(t)$, o della grandezza che essa rappresenta, in funzione del tempo (o della grandezza che esso rappresenta). Il vetro dello schermo del CRT è segnato da un reticolo a righe orizzontali e verticali, che consente la misura in scala del segnale in esame. Nei CRT degli oscilloscopi di grande precisione il reticolo è inciso sulla faccia interna del tubo.

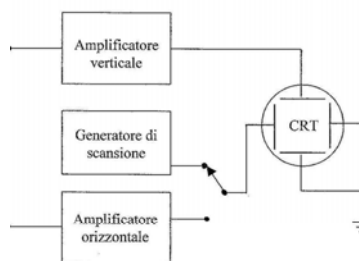


Figura 24: Schema a blocchi per l'utilizzo di un oscilloscopio con i componenti principali.

La figura 24 mostra il diagramma “a blocchi” di un CRO tipico con le principali unità: a) il CRT; b) il generatore di scansione (o base dei tempi), capace di fornire una tensione $V(t)$ “a dente di sega” con frequenza di scansione, f_{sc} , variabile, e di sincronizzarla con una tensione di ingresso ciclica; c) gli amplificatori di ingresso (X e Y), che possono amplificare ogni tensione di deflessione per evidenziare piccoli segnali di ingresso. Non è rappresentato qui l'alimentatore, che fornisce i potenziali alle placche per il comando del fascio elettronico e la corrente per il riscaldamento del catodo. Il generatore di scansione nel tempo secondo la forma indicata nella figura a lato. Teoricamente la tensione aumenta linearmente con il tempo fino ad un massimo per poi cadere quasi istantaneamente ad un minimo negativo di valore assoluto pari al massimo. Quando si applica l'uscita dal generatore di scansione alle placche di deflessione orizzontale, lo spot attraversa lo schermo a velocità costante. Nell'istante in cui la V_x raggiunge il massimo e precipita al minimo simmetrico negativo, lo spot scatta bruscamente indietro per poi ripetere il ciclo. La lunghezza del percorso è una misura del periodo dell'oscillatore (inverso della frequenza di scansione). La V_x è detta tensione di scansione o base dei tempi. A solo titolo di esempio, si supponga di applicare una tensione

sinusoidale a 1 kHz alle placche verticali del CRT e di applicare a quelle orizzontali il segnale della base dei tempi. Se si regola esattamente la frequenza del generatore di scansione per 1 kHz, sullo schermo compare l'immagine stazionaria di un'onda sinusoidale relativa ad un ciclo completo. Se la f_{sc} è leggermente diversa da 1 kHz, la sinusoide si sposta verso sinistra o verso destra (il reciproco del tempo - in secondi - impiegato per "spazzolare" esattamente una distanza pari ad una lunghezza d'onda misura lo scarto tra la f_{sc} e la frequenza in ingresso). Se la $f_{sc} = 0.5$ kHz, sullo schermo compaiono due sinusoidi complete stazionarie del segnale d'ingresso. Quando dunque la frequenza di scansione è uguale alla frequenza f_y del segnale relativo alla grandezza in esame, il grafico è continuamente riproposto in sovrapposizione ed appare stazionario.

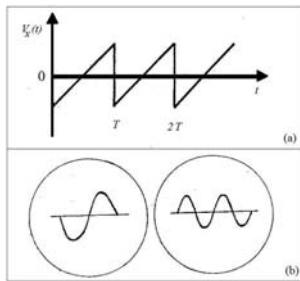


Figura 25: (a) Struttura a dente di sega per le placche orizzontali, che determina la scansione temporale. (b) Immagini su un display del CRO nel caso che la (f_{sc}) sia uguale alla frequenza in ingresso o $1/2$.

Per $f_{sc} = 1/nf_y$ (con n intero), sullo schermo compaiono n cicli del segnale e la frequenza di scansione si dice "sincronizzata". Per garantire che la f_{sc} sia esattamente la stessa di quella della tensione in esame, può essere bloccata dal controllo di sincronizzazione. Il CRO non solo consente la misura e/o la registrazione di correnti, tensioni e frequenze relative a fenomeni elettrici periodici o aperiodici, ma, con opportuni accorgimenti, consente anche lo studio di una qualsiasi grandezza che possa essere fedelmente convertita in un potenziale elettrico. Generalmente si ricorre ad un conveniente trasduttore: microfono o cristallo

piezoelettrico per i suoni e le sollecitazioni meccaniche, fototransistore o fototubo a vuoto per le radiazioni luminose, coppia termoelettrica o termistore per l'energia termica, ecc. Il numero, l'impiego e la disposizione dei comandi di un CRO variano a seconda del tipo di oscilloscopio e della sua complessità. I comandi principali (i dispositivi speciali sono descritti nei manuali che accompagnano ogni tipo di oscilloscopio) consentono tipicamente: la regolazione della nitidezza (FOCUS) e della luminosità (INTENSITY) della traccia, la sua centratura sullo schermo (HOR POS, VERT POS), la regolazione della frequenza della base dei tempi (HOR/FREQ SELECTION), e del rapporto di amplificazione della traccia (VERT GAIN, HOR GAIN).

0.14 Misura della velocità del suono in aria

Premessa

Il suono si propaga con una velocità finita, che varia con la natura del mezzo, e, nello stesso mezzo, aumenta al crescere della temperatura. Nell'aria si ha:

$$v_t = v_o \sqrt{1 + \alpha t}, \quad (35)$$

dove t è la temperatura in °C, v_t è la velocità alla temperatura di esperienza, v_o è la velocità a 0 °C (331.6 m/s in aria pura, secca) e $\alpha = 1/273 = 3.67 \cdot 10^{-3} \text{ °C}^{-1}$.

Siano: T (periodo) il tempo necessario per compiere un'oscillazione completa e ν (frequenza) $= 1/T$ il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo. La distanza che una determinata fase della vibrazione percorre durante un periodo T si chiama lunghezza d'onda (λ): rappresenta la minima distanza tra due particelle che vibrano in fase tra loro. Il rapporto

$$\frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = v \quad (36)$$

determina la velocità dell'onda, cioè la velocità con cui si propaga una data fase dell'onda. Nella equazione (36) v risulta in ms^{-1} , se λ è espressa in m e ν in Hertz ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$). La frequenza è una grandezza propria di qualsiasi sorgente di oscillazione; la lunghezza d'onda è caratteristica sia della sorgente, che del mezzo in cui l'onda si propaga, perché dipende dalla velocità di propagazione. I limiti inferiore e superiore delle frequenze udibili sono, rispettivamente, circa 18 Hz e 20 kHz; a queste frequenze competono, assumendo per v il valore di 343 m/s a 20 °C, le lunghezze d'onda massima e minima, rispettivamente, di 18 m e 1.7 cm.

Per non disturbare i colleghi l'esperienza sarà effettuata a frequenze ultrasoniche intorno ai 40 kHz, per le quali sono disponibili le velocità anche sul manuale presente in laboratorio.

Misura della lunghezza: onde stazionarie

Si considerino un'onda progressiva ed un'onda regressiva, ovvero un'onda che si propaga nel verso concorde alla coordinata x e un'onda, che si propaga nel verso opposto.

Si ottiene ciò utilizzando una sorgente posta di fronte ad una superficie, che riflette l'onda ma nella direzione opposta.

Le due onde (progressiva e regressiva) sono descritte dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) && \text{onda progressiva} \\ \alpha_2(x, t) &= A \sin(kx + \omega t) && \text{onda regressiva}\end{aligned}$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi\nu$. Si può ottenere la perturbazione risultante, $\alpha(x, t)$, dalla sovrapposizione delle due: $\alpha(x, t) = A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t)$, dato che $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$, si ottiene:

$$a(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

si osserva quindi che il punto di coordinata x oscilla di moto armonico con pulsazione ω , ma ha un'ampiezza $2A \sin(kx)$ costante rispetto al tempo e dipendente solo dalla posizione x . Questo tipo di perturbazione prende il nome di onda stazionaria. Ci saranno punti sempre fermi, dove l'oscillazione è nulla, detti nodi dell'onda stazionaria:

per $\sin(kx) = 0$ si hanno i nodi:

$$kx = n\pi \equiv x = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Ci saranno punti che oscillano con pulsazione ω e con ampiezza massima pari a $2A$ e sono i punti in cui $\sin(kx) = \pm 1$ (l'intensità dell'onda è proporzionale all'ampiezza al quadrato) detti ventri dell'onda stazionaria:

per $\sin(kx) = \pm 1$ si hanno i ventri:

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \equiv x = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

essi sono distanti $\lambda/2$ l'uno dall'altro a partire dal punto di coordinata $\lambda/4$. Si possono rilevare tali punti muovendo un microfono lungo l'asse x .

Se indichiamo con Δx due massimi qualsiasi successivi si ha

$$\Delta x = \left[(n + 1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right] - \left(n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\lambda}{2}. \quad (37)$$

Perciò è possibile misurare la lunghezza d'onda dalla distanza rilevabile con un sistema tipo nonio, per aumentare la sensibilità di lettura del regolo graduato.

Esecuzione

È necessario disporre di un generatore di funzione FG, di un altoparlante A, di un microfono M (mobile su un sistema tipo nonio) di un CRO a doppio fascio e di uno schermo riflettente S.

Dopo avere collegato il microfono e il FG, sul quale è derivato in parallelo l'altoparlante, alle placche verticali di ciascun canale del CRO, si sintonizzano le uscite da M e dal FG fino ad ottenere sullo schermo del CRO due tracce ben leggibili.

Sul display del FG è possibile leggere la frequenza del segnale periodico prodotto dal generatore di funzioni, e quindi del suono emesso dall'altoparlante. La frequenza può essere valutata anche dal segnale campione sul CRO facendo uso della scala della base dei tempi.

Si collocano in asse M ed A, disponendoli di fronte allo schermo S. Il microfono (M) può scorrere su una riga graduata (equipaggiata con un nonio) nello spazio, dove si ha interferenza delle due onde, permettendo di rilevare i massimi (e i minimi) di interferenza.

Come risultato l'ampiezza della traccia del segnale da M sullo schermo del CRO varia al variare della posizione x in cui si trova il microfono.

La distanza tra due posizioni consecutive per le quali si hanno dei massimi vicini (o anche due minimi vicini) consente la misura della lunghezza d'onda del suono emesso da A.

Quindi dalla relazione espressa nell'equazione (37), si ottiene la misura della lunghezza d'onda $\lambda = 2\Delta x$, sia per due massimi vicini. Stessa soluzione si ha nel caso si considerino anche la distanza tra due nodi vicini.

Misurata λ è possibile il calcolo di v secondo l'equazione (36). Si può così verificare l'accordo del valore determinato con il valore atteso sulla base della relazione espressa nell'equazione (35), nota che sia la temperatura ambiente.

Valutazione dell'errore

L'errore da valutare è per la velocità dell'onda di pressione.

A priori

L'errore a priori dedotto dalle sensibilità si propaga secondo:

$$\delta v = \left| \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right| \delta \lambda + \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right| \delta \nu \quad \text{dove } \delta \lambda = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial d} \right| \delta d$$

L'incertezza nella misura della frequenza ν può essere valutata sulla base della sensibilità del frequenzimetro incorporato nel generatore di funzioni. L'incertezza nella misura della lunghezza d'onda è legata all'incertezza nella misura della distanza tra due posizioni dello schermo d dalla dato che $\lambda = 2d$.

Errore a posteriori

A posteriori ci si accorgerà che la misura delle distanze tra i vari massimi, risulta diversa, per le varie posizioni.

È raccomandabile quindi che la distanza tra le due posizioni consecutive dello schermo venga valutata su più intervalli, anziché su uno soltanto.

Quindi si possono ottenere vari valori (il massimo che si riesce ad ottenere) di Δx , che forniranno vari valori di λ . Si può studiare allora tale grandezza come statistica e fare la verifica del $\tilde{\chi}^2$.

Una volta verificata che la variabile sia gaussiana oppure no, si possono poi propagare i vari errori per fornire il risultato v ed in seguito confrontarsi con il valore teorico per fornire il livello di confidenza.

0.15 Misura della lunghezza d'onda con il metodo delle due fenditure

Premessa

Interferenza e diffrazione sono fenomeni tipici e caratterizzanti la propagazione ondosa. Essi sono osservabili non solo nelle onde elettromagnetiche, ma anche nelle onde meccaniche. Le onde meccaniche necessitano di un mezzo materiale per la loro propagazione. Un gas, come l'aria nel caso di questa esperienza, può servire come mezzo per la propagazione di un'onda meccanica, nel qual caso la perturbazione consiste in variazioni periodiche di densità e pressione del gas. Numerosi effetti osservabili nelle onde meccaniche, nella cui categoria sono incluse le onde sonore, sono analoghi agli stessi effetti osservati con le onde elettromagnetiche (interferenza e diffrazione, per esempio). Va notato comunque che le onde sonore nei gas sono longitudinali invece che trasversali come le onde elettromagnetiche e quindi non presentano polarizzazione; ciò costituisce una differenza importante tra onde elettromagnetiche e onde sonore, che si propagano nei gas.

Per interferenza si intende la sovrapposizione di due o più onde nello stesso punto dello spazio. Per dar luogo a fenomeni di interferenza visibili occorre che le due onde siano “coerenti”, vale a dire con la stessa frequenza e con differenza di fase costante. Un modo per ottenere ciò consiste nel porre davanti a una sorgente di onde sonore uno schermo con due fenditure, che fungono da sorgenti (secondarie) di onde coerenti che interferiscono nello spazio antistante lo schermo. Si tratta della stessa disposizione del classico esperimento di Young, che nel 1802 provò la natura ondulatoria della luce. In questa esperienza essa verrà applicata allo studio delle onde sonore. Lo schema della disposizione sperimentale è rappresentato nella figura 26.

Un generatore di funzioni (FG) applica una f.e.m. sinusoidale a un trasduttore elettroacustico (altoparlante A) che produce un'onda sonora della stessa frequenza della f.e.m. L'onda sonora investe lo schermo con le due fenditure oltre le quali si trova il trasduttore opposto (microfono M) che trasforma il segnale acustico in elettrico, rilevabile sullo schermo di un oscilloscopio (CRO). Il microfono è montato all'estremità di un regolo imperniato nel punto centrale tra le fenditure e munito di goniometro per la misura dell'angolo θ . Le onde che interferiscono sono quelle che provengono dalle due fenditure. Si avrà interferenza costruttiva per quei valori di θ per cui la differenza tra i cammini delle onde dalle fenditure al microfono è pari a un numero intero di lunghezze d'onda (condizione di massimo):

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \text{dove } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (38)$$

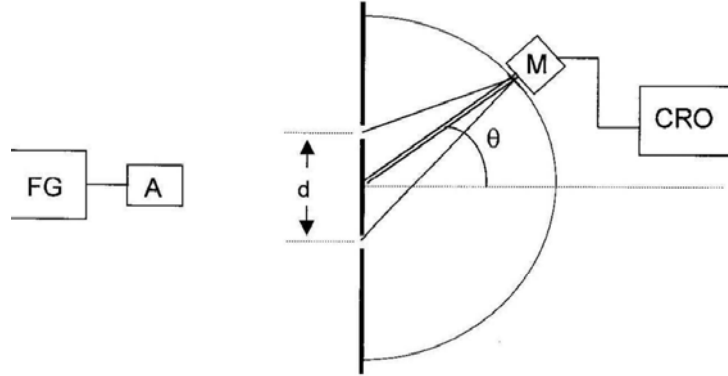


Figura 26: Schema a blocchi dell'apparato per la misura di interferenza con il metodo delle due fenditure.

Si otterrà un minimo per angoli θ , per i quali tale differenza è pari a un numero semintero di lunghezze d'onda (condizione di minimo):

$$d \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad \text{dove } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

0.15.1 Esecuzione

Per eseguire l'esperimento si stabilisce una frequenza per la f.e.m. del generatore di funzioni, e quindi dell'onda sonora, compatibile con le caratteristiche dei trasduttori impiegati. Con il microfono si vanno a individuare i valori di angolo θ per i quali si ha interferenza costruttiva, rilevabile dal segnale di maggior ampiezza sullo schermo dell'oscilloscopio, da cui secondo l'equazione (38) è possibile determinare il valore di lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{n}. \quad (40)$$

Gli angoli sono valutati rispetto alla direzione in cui si trova il massimo centrale ($n = 0$), in cui il microfono è equidistante dalle fenditure. Ruotando il regolo, p.es. verso destra, si trovano i valori $\theta_{1d}, \theta_{2d}, \theta_{3d}, \theta_{4d}$, corrispondenti ai massimi di interferenza di ordine crescente ($n = 1, 2, 3, 4$, rispettivamente), analogamente a sinistra si trovano i valori $\theta_{1s}, \theta_{2s}, \theta_{3s}, \theta_{4s}$, per i massimi, simmetrici a quelli di destra. Per ciascun angolo è possibile calcolare, con

la (40), il valore di lunghezza d'onda del suono alla frequenza prescelta. Si possono anche individuare i valori degli angoli corrispondenti alle posizioni di minimo (minima ampiezza del segnale sullo schermo dell'oscilloscopio), dai quali secondo la (39) la lunghezza d'onda è ottenibile dalla:

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{n + \frac{1}{2}} \quad (41)$$

($n = 0, 1, 2, 3$, in questo caso). Occorre porre molta cura nell'individuazione delle corrette posizioni di massimo [e di minimo], poiché questa misura può essere “disturbata” da effetti spuri derivanti da riflessioni su superfici presenti nell'ambiente in cui si opera, da fenomeni di diffrazione da ogni singola fenditura, nonché da eventuali altre onde acustiche, esterne all'esperienza, che possono arrivare al microfono.

Stima delle incertezze

L'esperimento permette un'analisi degli errori a priori.

Errori a priori

L'errore a priori su λ si può dedurre dalla differenziazione dell'equazione 39 per i massimi e dell'equazione 41 per i minimi. Si osservi come l'errore a priori varia in funzione dell'angolo, questo implica una trattazione particolare dell'errore.

Errore a posteriori

A causa dell'inevitabile incertezza nelle misure i valori di λ che si otterranno non saranno tutti uguali. Il risultato finale può essere espresso calcolando la media dei valori di λ , per esprimere l'indice di centralità, mentre l'indice di dispersione può essere ottenuto sulla base dell'incertezza dei valori di d e di θ , tramite la legge di propagazione degli errori, oppure se si dispone di un numero relativamente grande (≥ 10) di valori di λ facendo uso di uno dei parametri noti per esprimere la dispersione dei dati in una misura ripetuta (p. es., la deviazione standard).

Si faccia attenzione che ogni singolo valore, se si tiene conto dell'errore di sensibilità di lettura ha una precisione diversa, pertanto ogni valore andrebbe pesato sulla base del suo errore. Perciò per svolgere l'esperienza in modo opportuno nel valutare media e deviazione standard si dovrebbe utilizzare la media pesata di ogni singolo valore.