Lancio di un grave verso l'alto e il suo studio con l'asse *y* orientato in due modi diversi.

Utilizziamo il lancio di un grave verso l'alto come esempio, per ripassare l'analisi di funzione di una variabile e le implicazioni dei sistemi di assi coordinati, per un caso semplice di un solo asse.

1) Caso: asse *y* orientato verso l'alto.

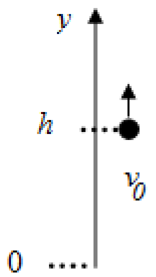

Figura 1 Lancio verso l'alto di un oggetto, rispetto all'asse *y* orientato verso l'alto.

Supponiamo di studiare il lancio di un grave nel caso, in cui l'asse *y* sia orientato verso l'alto. Si assuma una velocità, verso l'alto, iniziale *vo*.

Partiamo dal caso generale del moto uniformemente accelerato già con la notazione vettoriale:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2. \quad (1)$$

Visto che parliamo di lancio verso l'alto, risulta più chiaro considerare l'asse *y*, e per quanto riportato in Fig. 1 la (1) diventa:

$$y = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (3)$$

usiamo questo esempio per ripassare alcune regole dell'analisi di funzione di una variabile.

Per trovare massimi o minimi relativi di una funzione bisogna trovare, i valori per i quali si annulla la derivata prima, eppoi calcolare la derivata seconda nei valori trovati.

Se la derivata seconda è negativa, il valore risulta un massimo, se invece è positiva risulta un minimo.

Vediamo tali regole come si comporta nel caso del moto del grave suddetto.

La derivata prima della funzione *y* si annulla per il valore di *t:*

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - gt = 0 \ ,$$

ovvero per $t_{er}=v_0/g$,

dove abbiamo etichettato t_{er} per intendere il tempo di eventuali estremi relativi. Dal punto di vista fisico c'è qualcos'altro da dire *dy/dt* è la velocità del corpo, percui si ha il massimo, nel caso di un lancio verso l'altro, quando la velocità risulta nulla.

Intuitivamente si osserva già che per il tempo t_{er} avremo un massimo relativo della posizione lungo l'asse *y*, ma continuiamo con questo esempio e verifichiamo, se la derivata seconda risulta minore o maggiore di zero nel valore t_{er}.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v_0 - gt) = -g \ ,$$

come ci aspettavamo.

In questa caso semplice non è necessario calcolarla per il valore in cui si annulla la derivata prima, in quanto assume lo stesso valore per qualsiasi valore di *t*.

Se consideriamo i seguenti dati $h = 2$ m, v_0= 9.8 m s^{-1} , g = 9.8 m s^{-2}, si possono riportare i grafici della posizione, rispetto all'asse *y* orientato verso l'alto, e la velocità rispetto a questo asse.

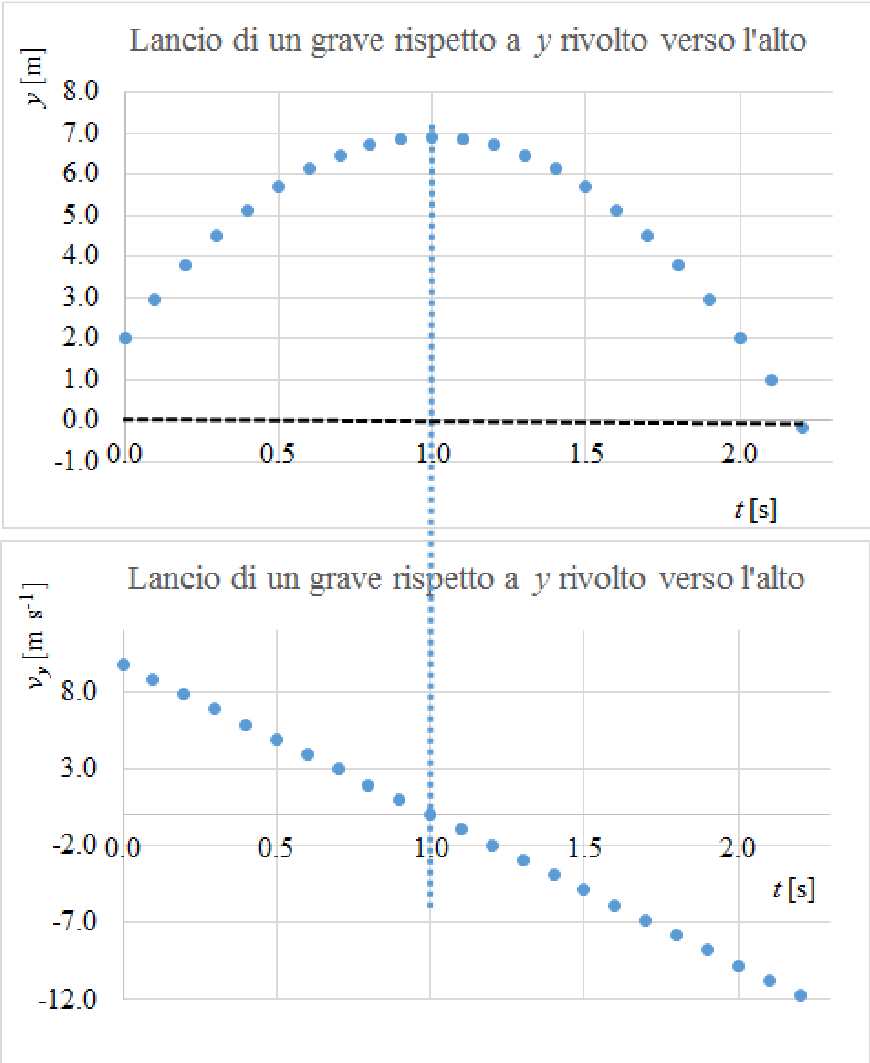

Figura 2. Andamento della coordinata y e della velocità in funzione del tempo, nel caso di un lancio di un oggetto verso l'alto, rappresentato con l'asse coordinato rivolto verso l'altro.

E si possono trovare i valori numerici di t per cui si ha il massimo della quota, e la velocità in quell'istante, o in quella posizione. Così si potrebbe anche fornire il tempo in cui l'oggetto tocca il suolo ed anche la velocità in quell'istante.

La preoccupazione dello studente è se sbaglia a scegliere l'orientamento di un asse.

Vediamo l'impostazione dell'asse verso l'alto, risulta quasi naturale e ci si ritrova che l'oggetto raggiunge la massima quota, proprio per il valore di y massimo.

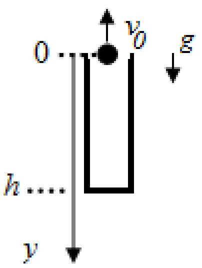

Figura 3. Lancio di un grave verso l'alto, rispetto ad un asse orientato verso il basso.

Ovviamente potrei descrivere il moto precedente, invertendo l'asse, ma per renderlo più credibile, supponiamo stavolta di trovarci sul bordo di un pozzo profondo h e di lanciare un corpo sempre verso l'alto.

Vedremo come l'inversione dell'asse e l'analisi di funzione, potrebbe portarci ad affermazioni, ambigue o confusionarie. Come presentato in Fig. 3 si osservi che il moto dell'oggetto è lo stesso, ma rappresentato rispetto all'asse delle y orientato verso il basso assume tutt'altro aspetto analitico.

L'equazione generale del moto unidimensionale

Va riscritta per la Fig. 3 dalla (1) risulta adesso:

$$y = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

per trovare un estremo relativo:

$$\frac{dy}{dt} = -v_0 + gt = 0,$$

si ottiene lo stesso risultato $t_{er}=v_0/g$, ma la derivata seconda:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-v_0 + gt) = g,$$

risulta maggiore di zero, quinti la soluzione t_{er} è un minimo relativo.

Infatti se osservo il grafico della funzione

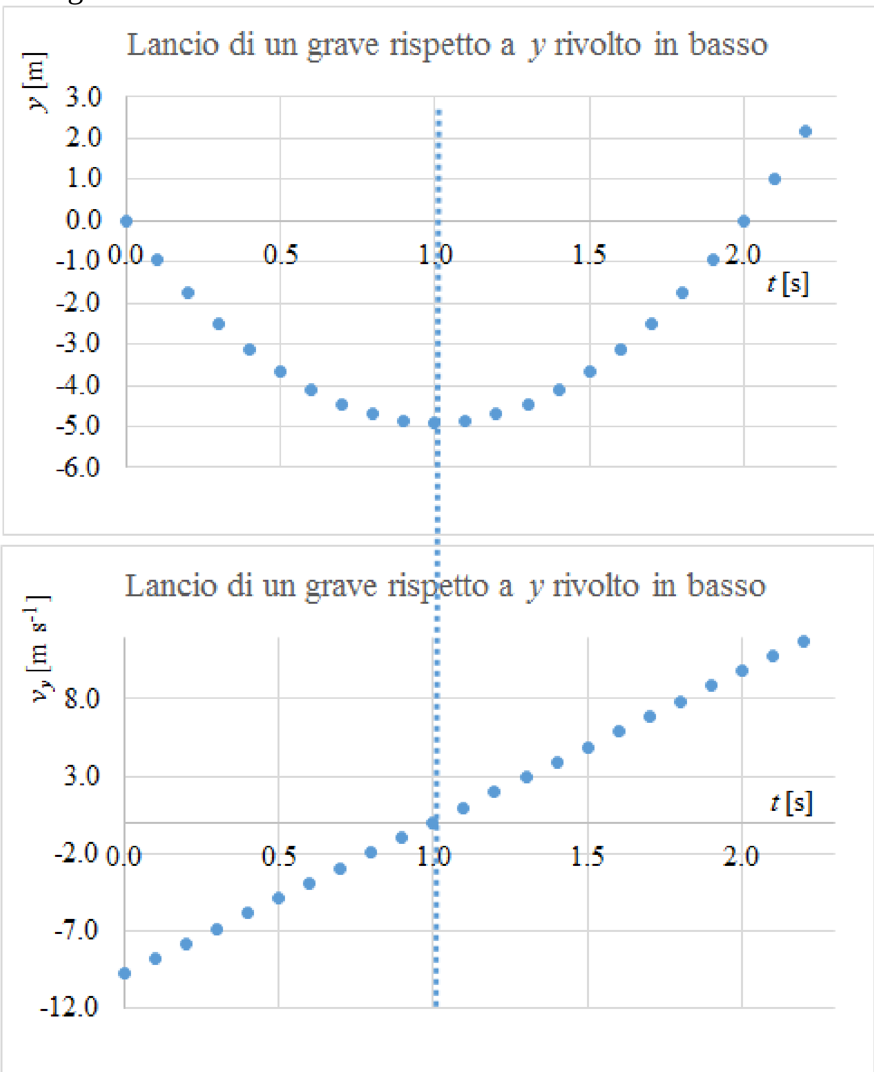

Figura 4. Andamento della funzione *y* rispetto al sistema di assi coordinati, riportati in Fig. 3.

La differenza di quota, tra il precedente massimo e il punto di partenza, e tra lo zero di adesso ed il punto di minimo, è in valore assoluto la stessa. Ma riferito all'asse nel primo caso è positivo, in questo secondo caso lo spostamento è negativo.

Abbiamo utilizzato questo esempio, per ripassare le condizioni per l'analisi matematica, che ci permettono di ricavare gli estremi relativi, ma abbiamo anche fornito indicazioni, sull'importanza del "quadro grafico" in fisica per sfruttare al meglio le potenzialità della matematica.

Non basta guardare alle formule, ma bisogna tradurle nella situazione reale, per poterle usare in modo appropriato.

Come esercizio si propone per il primo caso di calcolare il massimo valore della *y*, il tempo in cui l'oggetto raggiunge il massimo, il tempo necessario per ripassare per la quota *h*, il tempo necessario per raggiungere il suolo.

Anche se in termini diversi per il caso 2 chiediamo di calcolare il valore minimo, il tempo per raggiungere il minimo, il tempo necessario per passare dallo zero, il tempo necessario per raggiungere il fondo del pozzo.