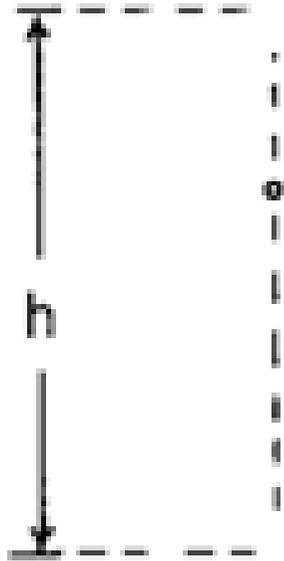


Propagazione delle incertezze



$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

Posso misurare g , indirettamente

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

Devo propagare le incertezze su h e t .

Posso misurare g , indirettamente

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Propagare le incertezze su l e T , se t è il tempo di N oscillazioni,

$$T = t / N$$

propagare l'incertezza su t .

Propagazione delle incertezze

$$v_s = 2(x_1 - x_2)\nu$$

Velocità del suono v_s misurata dalla distanza tra due massimi (x_1 ed x_2) di onde stazionarie e la frequenza (ν).

Caso generale: deduzione di una grandezza dipendente (v_s) da altre grandezze indipendenti (x_1, x_2, n).

Le grandezze indipendenti possono a loro volta essere dedotte da relazioni, per cui dipendenti a loro volta (λ lunghezza d'onda per esempio).

$$\lambda = 2(x_1 - x_2)$$

$$v_s = \lambda\nu$$

Attenzione a non confondersi con misure dirette o indirette

È utile la descrizione funzionale g grandezza dipendente da x, y, \dots , e z :

$$g = g(x, y, \dots, z)$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$$g = x + y \quad x = x_{ms} \pm \delta x \quad y = y_{ms} \pm \delta y$$

Vogliamo trovare la migliore stima di g e l'incertezza δg

$$g_{ms} = x_{ms} + y_{ms}$$

Qual è il valore massimo g ?

$$g_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (x_{ms} + \delta x) + (y_{ms} + \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) + (\delta x + \delta y)$$

Qual è il valore minimo g ?

$$g_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = (x_{ms} - \delta x) + (y_{ms} - \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) - (\delta x + \delta y)$$

Esprimiamo la misura di g :

$$g = g_{ms} \pm \delta g$$

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$$g = x + y + z = \zeta + z$$

Possiamo iterare per n variabili (grandezze)

Possiamo verificare che anche nelle sottrazioni:

$$g = x - y$$

Si ha

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

In generale in caso di somme o sottrazioni:

$$g = x + 0 - y + 0 - \dots - z$$

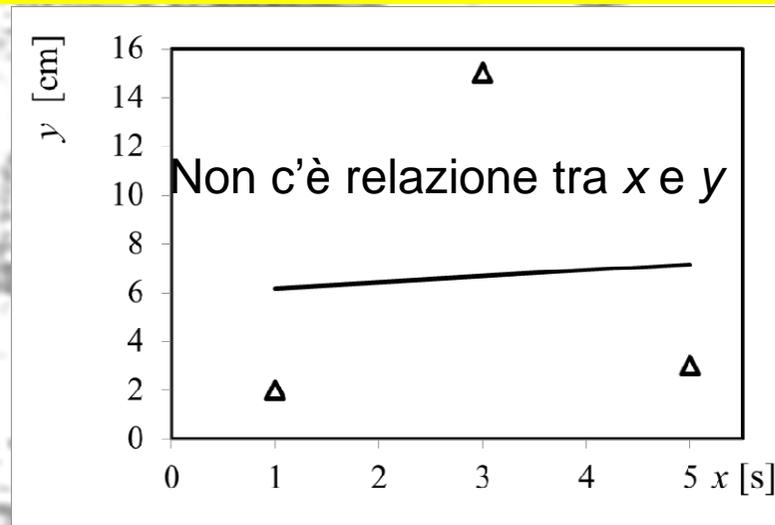
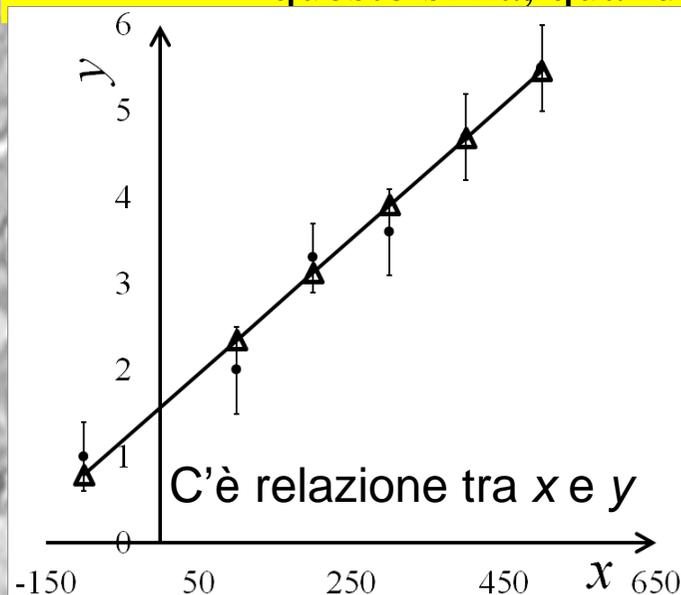
$$\delta g = \delta x + \delta y + \dots + \delta z$$

si sommano le incertezze totali (assolute)

Somme lineari ed in quadratura

$$g_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (x + \delta x) + (y + \delta y) = (x + y) + (\delta x + \delta y)$$

In questa derivazione abbiamo assunto che, quando x è massima, lo è anche y , questo si ha, quando c'è relazione tra le due grandezze.



Se non c'è relazione si sommano in quadratura $(\delta g)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \dots + (\delta z)^2$

$$\delta g = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \dots + (\delta z)^2}$$

Dimostrazione non proponibile agli studenti, ma G. Ciullo pag. 170 covarianza e correlazione.

Propagazione prodotti e frazioni

	$\tilde{y} + \delta y$		$\delta x \delta y$
	\tilde{y}	$+ \tilde{x} \delta y$	
	$\tilde{y} - \delta y$	$- \tilde{x} \delta y$	
		\tilde{g}	$\begin{matrix} -\tilde{y} \delta x \\ +\tilde{y} \delta x \end{matrix}$
<i>II</i>		<i>I</i>	
			$\begin{matrix} -\delta x \tilde{x} \\ +\delta x \tilde{x} \end{matrix}$
<i>III</i>		<i>IV</i>	

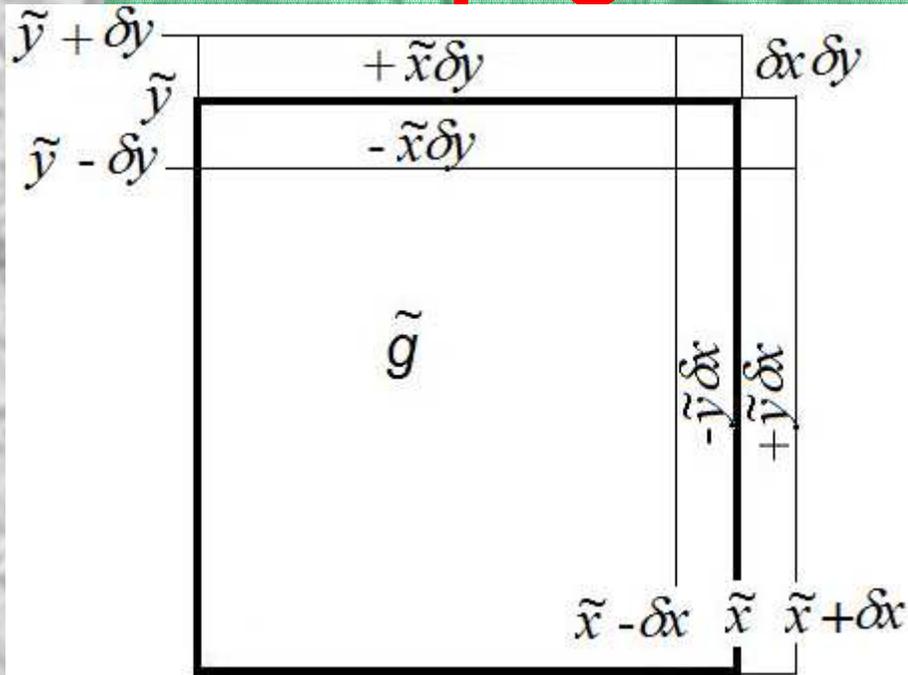
$$g = xy$$

Discuto il caso xy , con x ed y positive

Se prendo in valore assoluto $|x/y|$, la discussione vale per tutti i casi come mostrato a lato.

Quindi quanto ricavato lo estendo a qualsiasi situazione, rispetto ai valori assoluti. Le incertezze le esprimiamo in valore assoluto.

Propagazione per prodotti



$$g = xy$$

$$g_{ms} = x_{ms} y_{ms}$$

$$g_{\max} = x_{\max} y_{\max}$$

$$g_{\max} = (x_{ms} + \delta x)(y_{ms} + \delta y) = x_{ms} y_{ms} + x_{ms} \delta y + y_{ms} \delta x + \delta x \delta y$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms} \delta y + y_{ms} \delta x$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms} y_{ms} \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right)$$

$$\delta g = g_{\max} - g_{ms} \approx x_{ms} y_{ms} \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right)$$

$$\frac{\delta g}{x_{ms} y_{ms}} = \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right)$$

$$g_{ms}$$

Propagazione per prodotti

$$g_{\min} = (x_{ms} - \delta x)(y_{ms} - \delta y) = x_{ms} y_{ms} - x_{ms} \delta y - y_{ms} \delta x + \delta x \delta y$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms} \delta y - y_{ms} \delta x$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms} y_{ms} \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right)$$

$$\frac{dg}{g_{ms}} = \frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta x}{|x_{ms}|}$$

Con i valori assoluti includo tutti i possibili casi.

Propagazione per prodotti ... frazioni

$$g = xyz = \zeta z$$

Possiamo iterare per n variabili (grandezze)

$$g = xy \cdots z$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

Frazioni

$$g_{\max} = \frac{x_{\max}}{y_{\min}} = \frac{x_{ms} + \delta x}{y_{ms} - \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}} \left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right) \left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}} \right)$$

$$\left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}} \right) \left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}} \right) \approx 1 + \frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\max} = g_{ms} + g_{ms} \left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}} \right)$$

$$g_{\min} = \frac{x_{\min}}{y_{\max}} = \frac{x_{ms} - \delta x}{y_{ms} + \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}} \left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}} \right) \left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}} \right)$$

$$\left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}} \right) \left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}} \right) \approx 1 - \frac{\delta x}{x_{ms}} - \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\min} = g_{ms} - g_{ms} \left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}} \right)$$

Prodotti/frazioni somma lineare e quadr.

$g = g(x, y, \dots, z)$ frazioni e/o prodotti

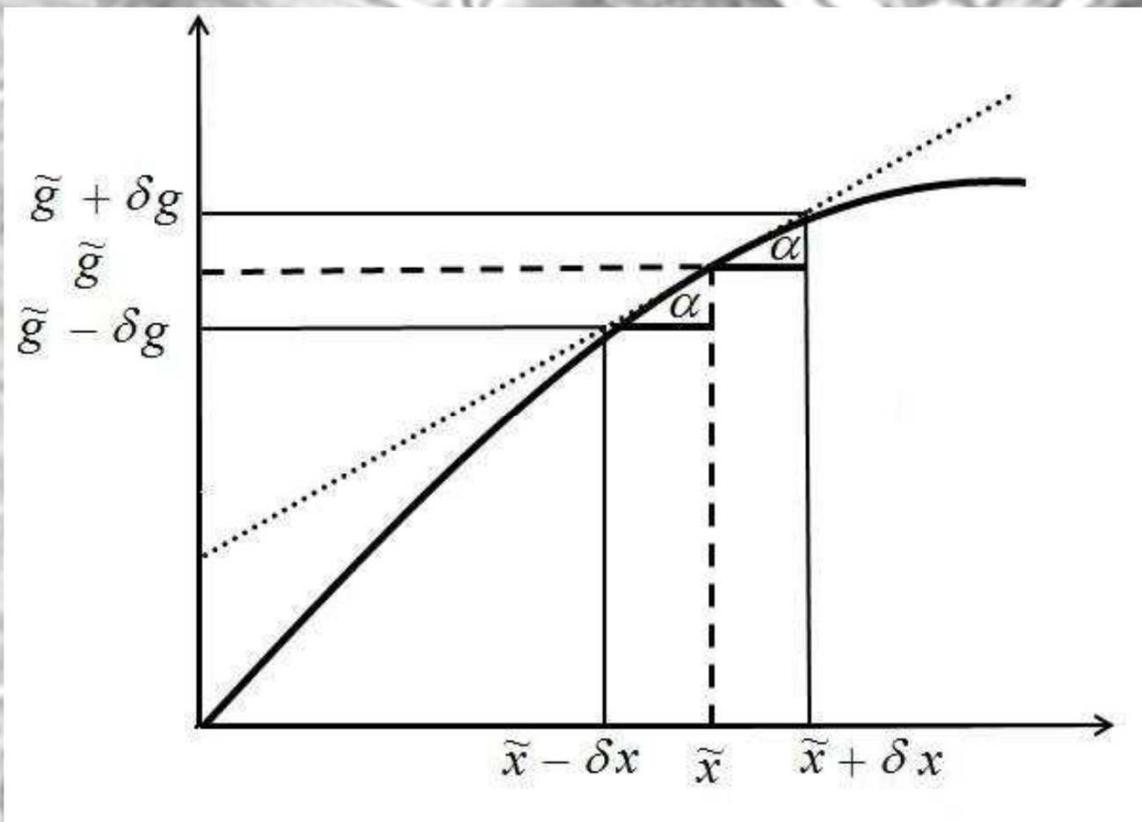
$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

x, y, z dipendenti tra loro,

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z_{ms}}\right)^2}$$

x, y, z indipendenti tra loro.

Propagazione su relazioni funzionali



$$\frac{\delta g}{\delta x} \approx \left| \frac{d}{dx} g(x) \right|$$

Una volta studiate le derivate, si può anche introdurre.

Considerazioni

Per la propagazione segnaliamo che abbiamo utilizzato il simbolo δ , per intendere l'incertezza totale, ma si intende una piccola variazione rispetto ad un valore (per noi la migliore stima = misura).

Le regole valgono per qualsiasi tipo di incertezza (ε_x , η_x , σ_x , δx), dato che ci si aspetta siano tutte piccole quantità, rispetto a x_{ms} .

Misuriamo di g

- Possiamo provare a misurare l'accelerazione gravitazionale g , per esempio con misure ripetute di una pallina lasciata cadere.

Oppure

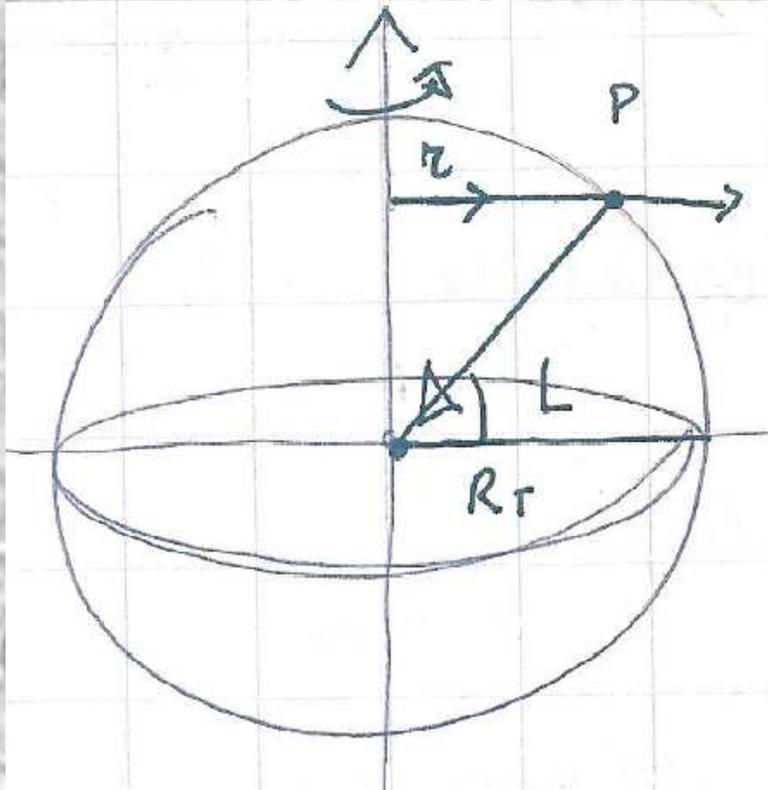
- Possiamo misurare con misure ripetute del periodo del pendolo.

Seguiamo quest'ultimo approccio, in quanto pensiamo di avere più controllo, per esempio possiamo aumentare il numero di oscillazioni e migliorare la precisione nella misura di T .

Stima a priori delle incertezze

- Stima a priori delle incertezze: serve per farsi un'idea di quale precisione si possa raggiungere. A cosa serve?
 - per iniziare a ragionare su quale incertezza domina maggiormente nella misura,
 - per iniziare, prima di andare in laboratorio, a vedere, quali formule usare per la propagazione, o dare maggiore attenzione alle grandezze più influenti.

Perché questa precision, o cosa possiamo vedere?



- Per effetto della rotazione della terra, al variare della latitudine la forza centrifuga riduce l'accelerazione di gravità.
- All'equatore forza centrifuga massima:

$$g = 9.781 \text{ m/s}^2$$

- Ai poli forza centrifuga minima:

$$g = 9.831 \text{ m/s}^2$$

A Ferrara latitudine 44.83° :

$$g = 9.806 \text{ m/s}^2$$

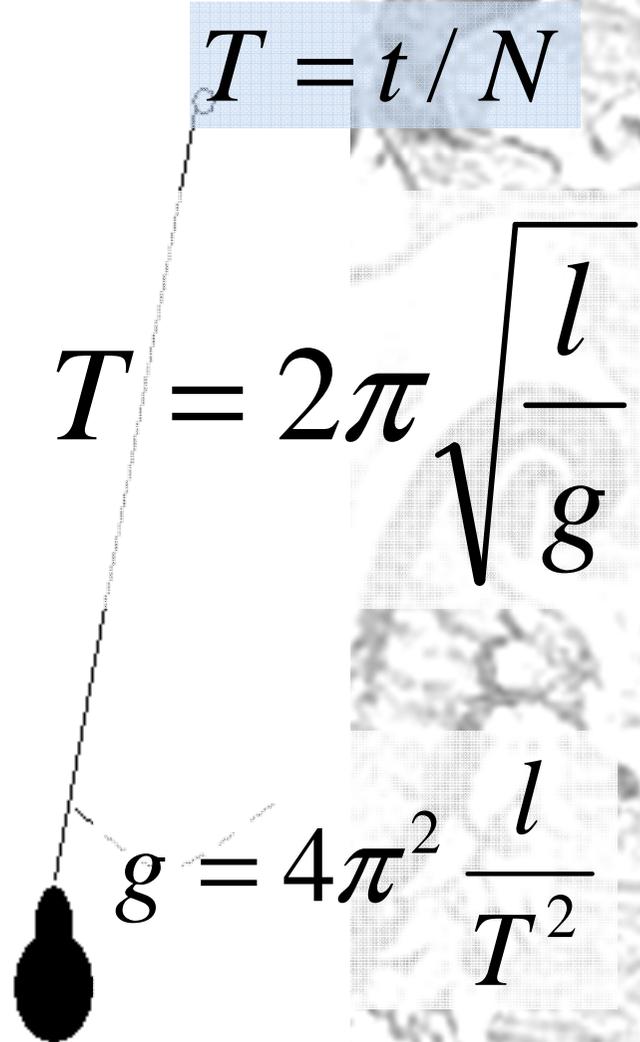
Variazione totale di g : $\Delta g / g_{centrale} = 0.05 / 9.806 = 5.1$ per mille $\sim 5 \%$

A priori con un apparato, è verificabile l'effetto della forza centrifuga?

Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $T = t/N$:
 - $\delta T = \delta t/N$
 - *Non esageriamo però: tempo, attrito?*
- $g = 4\pi^2 l/T^2$
 - $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T}$

A priori solo incertezze di lettura (ε):

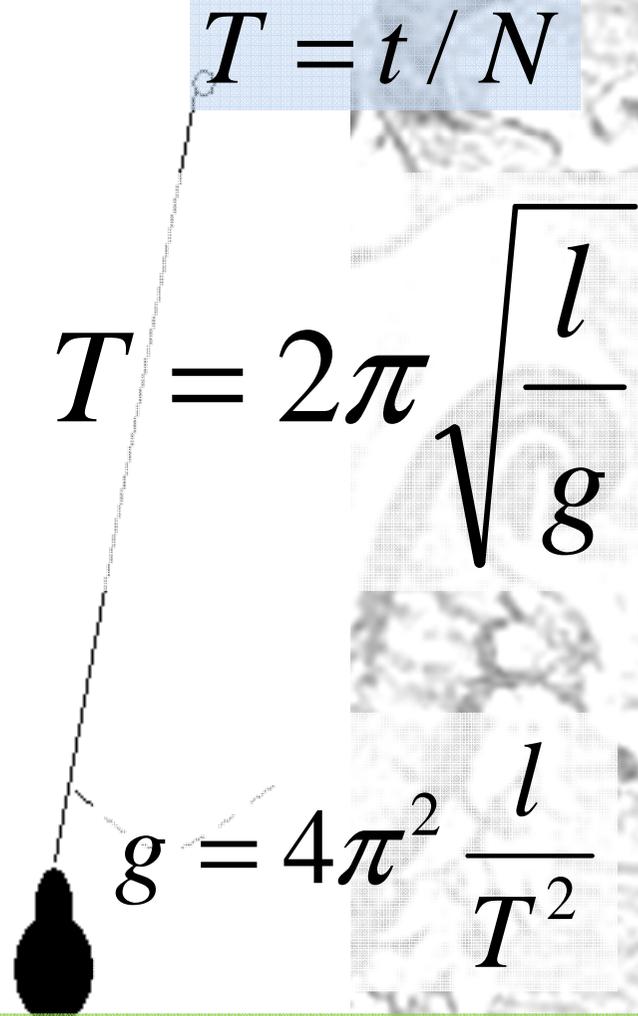


Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $\varepsilon_T = 1/3 \varepsilon_t =$
 $= 1/3 (1/2 * 1/100 \text{ s}) =$
 $= 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
- $\varepsilon_l = 1/2 (1 \text{ mm}) = 0.5 \text{ mm}$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = \frac{\varepsilon_l}{l} + 2 \frac{\varepsilon_T}{T} = \frac{0.5 \text{ mm}}{1200 \text{ mm}} + \frac{1.7 \cdot 10^{-3} \text{ s}}{2.2 \text{ s}}$$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = 0.04 \% + 0.08 \% = 0.12 \%$$



Misuriamo e ...

Misure ripetute: 3 oscillazioni $t=3 T$

$$T = t / N$$

j_{studente}		1	2	3	4	5	6	7
	Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P
i_{misura}	1	6.71	6.57	6.57	6.49	6.71	6.64	6.05
	2	6.73	6.65	6.95	6.57	6.68	6.78	6.64
	3	6.67	6.75	6.42	6.73	6.74	6.73	6.11
	4	6.73	6.61	6.63	6.67	6.70	6.63	6.36
	5	6.70	6.57	6.73	6.66	6.79	6.65	6.87
	6	6.63	6.65	6.63	6.67	6.99	6.66	6.34
	7	6.76	6.69	6.83	6.67	6.90	6.63	6.25
	8	6.78	6.71	6.53	6.72	6.71	6.72	6.32
	9	6.57	6.49	6.66	6.65	6.65	6.62	6.65
	10	6.76	6.60	6.67	6.69	6.89	6.63	6.89

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t_{\text{medio}} = 6.65 \text{ s}$$

$$\sigma_t = 0.17 \text{ s}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Incertezza casuale $\sigma_t / t = \sigma_T / T = 0.03$

Incertezza totale $(\delta t)^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 = (0.17 \text{ s})^2$

Incertezza su l

l [cm]	121.0	121.2	120.9	121.7	121.2	120.8	121.3
j_{studente}	1	2	3	4	5	6	7
Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P

$$l_{\max} = 121.7 \text{ cm}, l_{\min} = 120.8 \text{ cm}$$

Pochi dati per usare dev. St. e media:

$$l_{ms} = \text{valore centrale} = l_{\text{val. centr.}} = \frac{l_{\max} + l_{\min}}{2}$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \text{semidispersione} = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{2}$$

Il massimo ed il minimo hanno anche un'incertezza di lettura, non contemplata nell'intervallo, si possono sommare in modo lineare o anche in quadratura:

$$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2$$

Per la dispersione si usa appositamente il simbolo $\Delta_l = (l_{\max} - l_{\min})$, con l al pedice per distinguerlo dal semplice scarto Δl qualsiasi $= (l_2 - l_1)$.

Incertezza su l

$$l_{val. centr.} = 121.25 \text{ cm}, \frac{\Delta l}{2} = 0.45 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_l = 0.05 \text{ cm}$$

$$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2 = 0.45 \text{ cm} \approx 0.5 \text{ cm}$$

$$\frac{\delta l}{l} = 0.4 \%$$

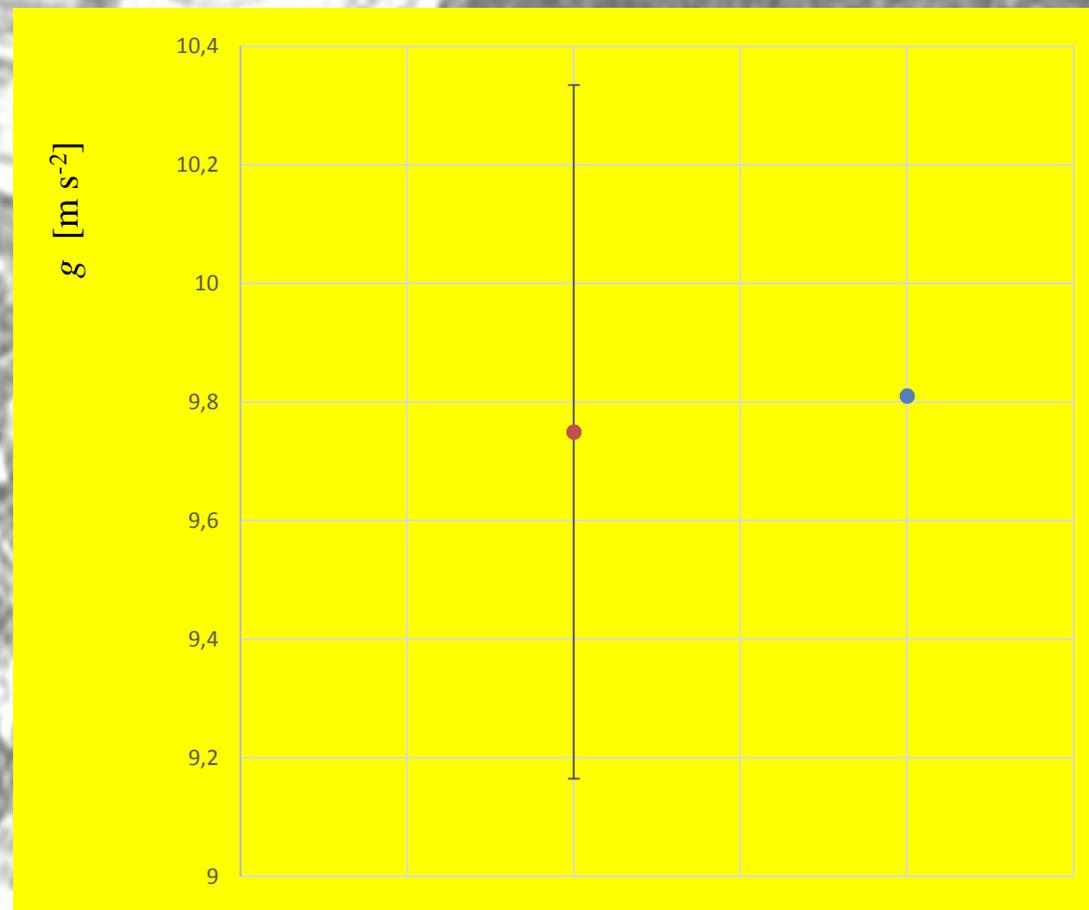
$$\text{A posteriori } \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2 \frac{\delta T}{T} = 0.06 = 6 \%$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

g	9.749524
$\delta g =$	0.584971

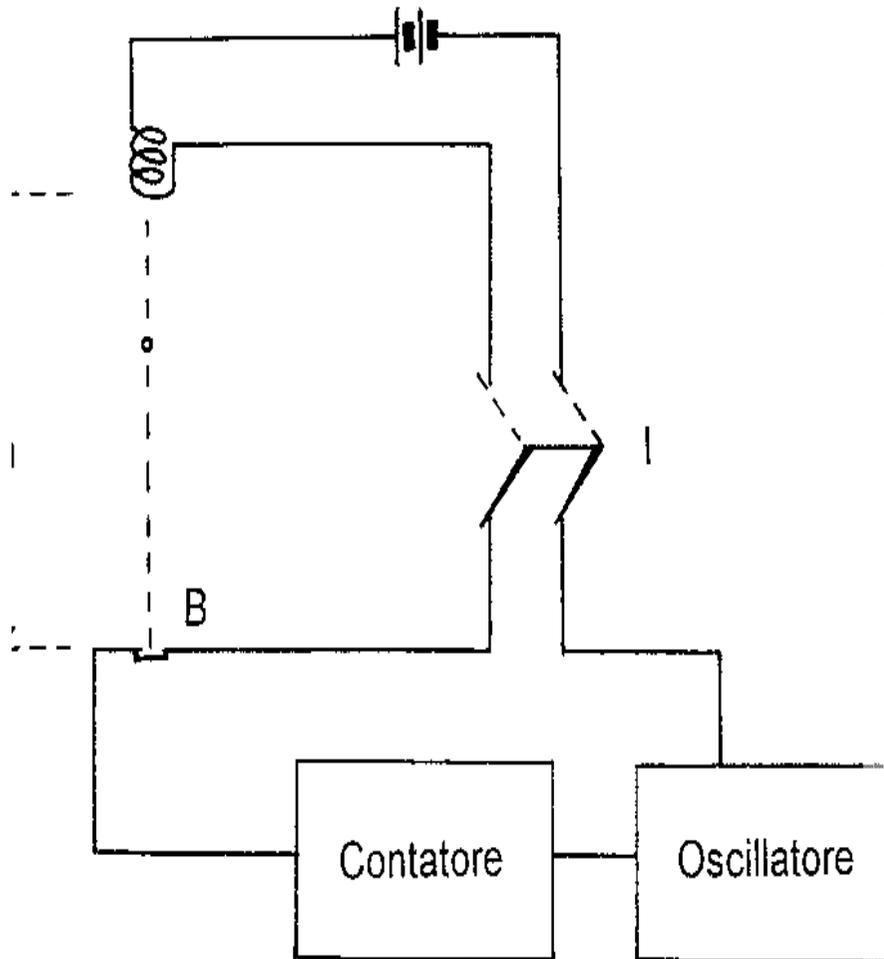
Otteniamo la misura di $g = 9.7 \pm 0.6 \text{ m s}^{-2}$

Confronto con il valore atteso



Estraiamo quindi le misure di g

maggiore precisione = maggiore complicazione



Precisione su intervalli di tempo
con un oscillatore (impulsi/s),
un contatore (ris. 1 impulso).

Incertezza a priori:

per $t = 0.45$ s,

100 000 impulsi al secondo,
precisione: $0.5/45\ 000$

$$\varepsilon/t \sim 1/100\ 000.$$

Incertezza a priori su $h = 1$ m,
stecca metrica (ris. 1 mm)

$$\varepsilon_h/h \sim 0.5\ \text{mm}/1\ 000\ \text{mm}.$$

Incertezza a priori su misura di g

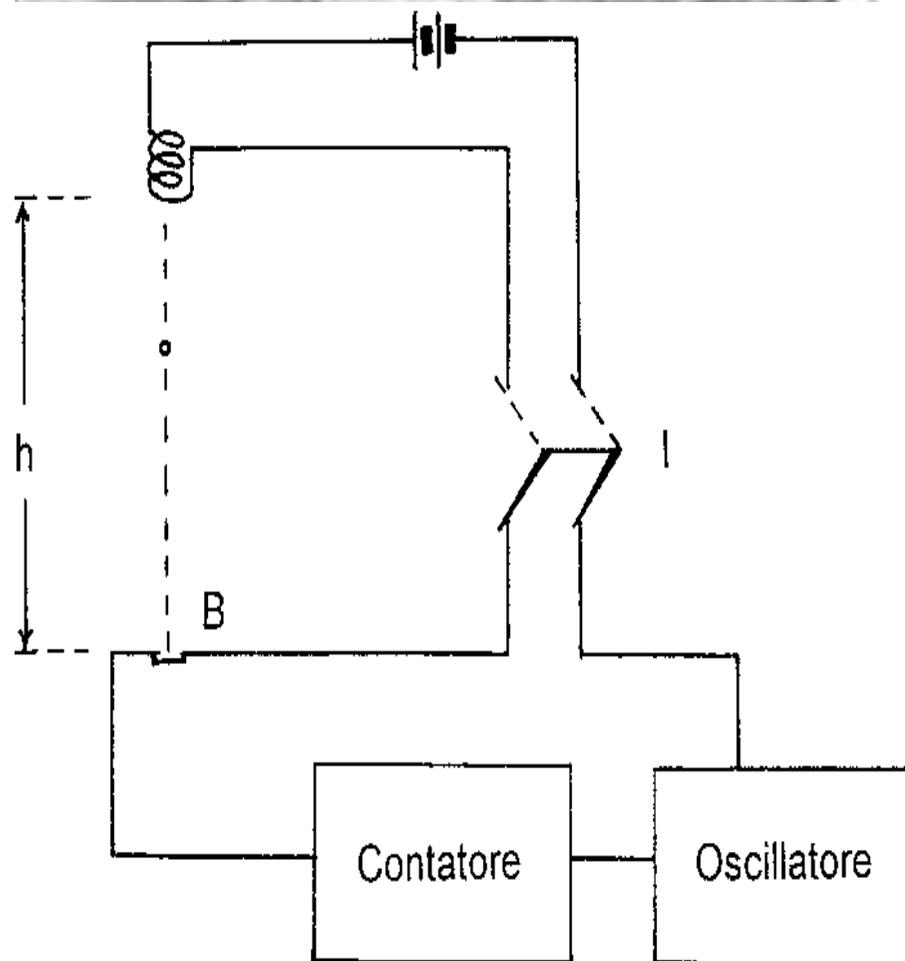
$$h = \frac{1}{2} g t^2 \equiv g = \frac{2h}{t^2}$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2 \frac{\delta t}{t} \quad \frac{\delta g}{g} = 0.0005 + 0.00002$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{0.5}{1\,000} + 2 \frac{0.5}{45\,000} \quad 0.52 \text{ per mille}$$
$$\approx 5 \text{ su } 10\,000$$

Apparato per la misura precisa di g :

maggiore precisione = maggiore complicazione



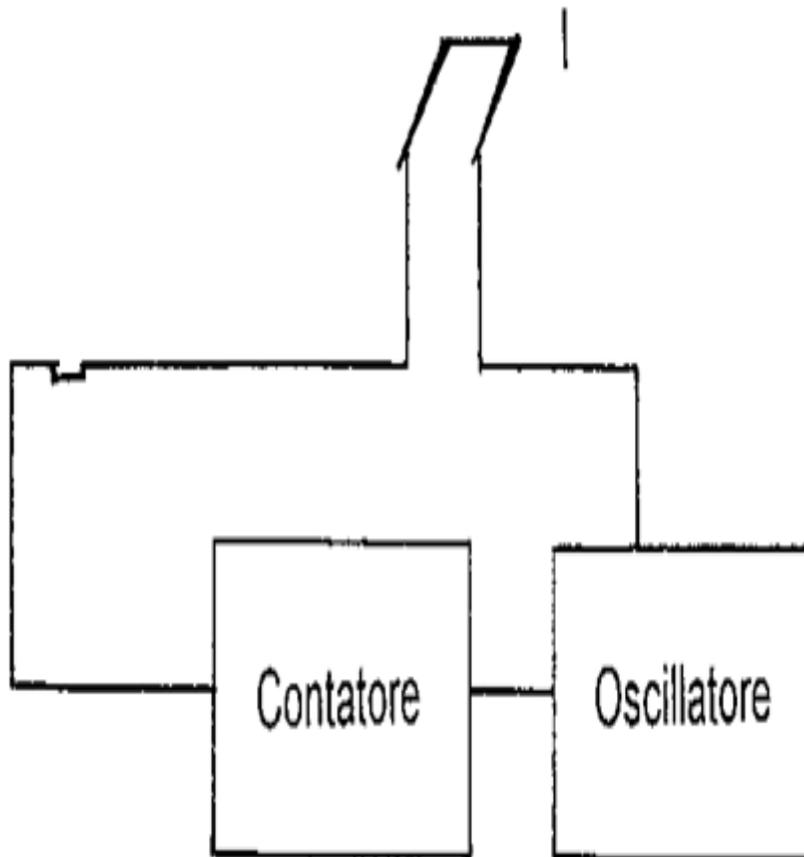
- Misure del tempo:

- Misura diretta del numero di impulsi durante la caduta: n .
- Conversione da n a t sulla base della misura del numero di impulsi per unità di tempo

- $n_{un} = \text{impulsi/s}$

$$t = \frac{n}{n_{un}} \stackrel{\text{dim}}{=} \frac{\text{impulsi}}{\text{impulsi/s}} = \text{s}$$

Misura del numero di impulsi al s: n_{un}



- Cronometriamo per un tempo fissato (2') t_f il numero di impulsi che acquisisce il contatore n_f .

$$n_{un} = \frac{n_f}{t_f} \left(\frac{\text{impulsi in } 2'}{120 \text{ s}} \right)$$

2 misure all'inizio dell'esperienza, 2 a metà, e 2 alla fine.

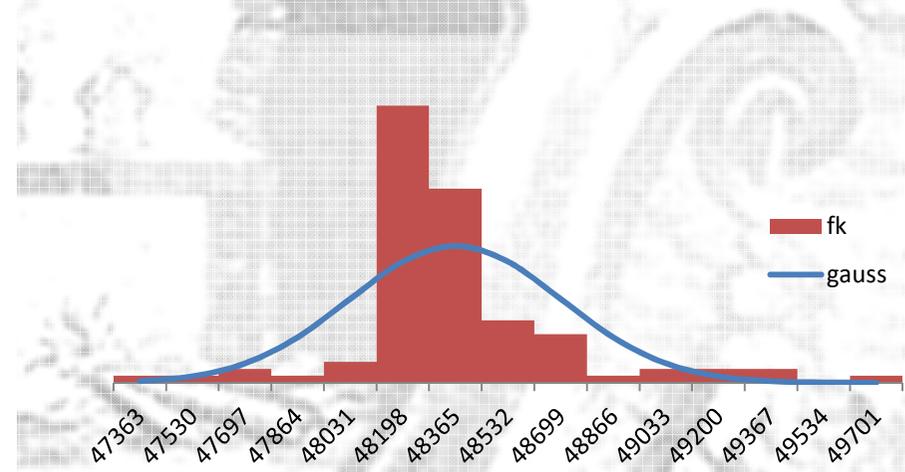
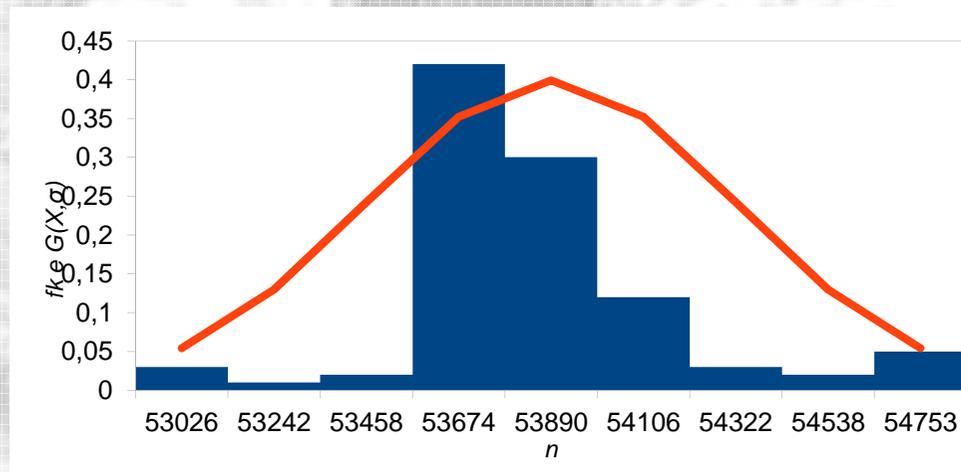
- Avremo 6 misure di n_{un} .

- $n_{un} =$ valore centrale \pm semidisersione.

intervallo del 100 % dei dati osservati

Impulsi durante la caduta: n .

- n ripetuto per 100 volte (all'inizio, a metà ed alla fine di queste misura, si misura n_{un}).
- Studio della variabile osservata n : è gaussiana?



- Comunque n_{medio} stima del valore di centralità X ,
- σ_n stima del punto di flesso σ .

Incertezza su n

- Se n è gaussiana possiamo utilizzare per l'incertezza statistica la deviazione standard della media (σ_n/\sqrt{N} , N è il numero di dati).
- Se n non è gaussiana una buona stima dell'incertezza statistica è la deviazione standard del campione (σ_n : calc., excel).
- L'incertezza su n deve contenere l'incertezza dovuta alla risoluzione (detta di lettura vedi strumenti digitali ε_n)

n non gaussiana

$$\delta n = \sqrt{\sigma_n^2 + \varepsilon_n^2}$$

n gaussiana

$$\delta n = \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{N} + \varepsilon_n^2}$$

Misura del tempo di caduta: t .

- Dalla relazione $t = n/n_{un}$
 - La migliore stima di t (t_{ms}) si ha da

- n_{media} \bar{n}

- n_{un} valore centrale \hat{n}_{un}

- $t = n/n_{un}$ $t_{ms} = \frac{\bar{n}}{\hat{n}_{un}}$

- Qual è l'incertezza sul tempo di caduta?

Incertezza su t

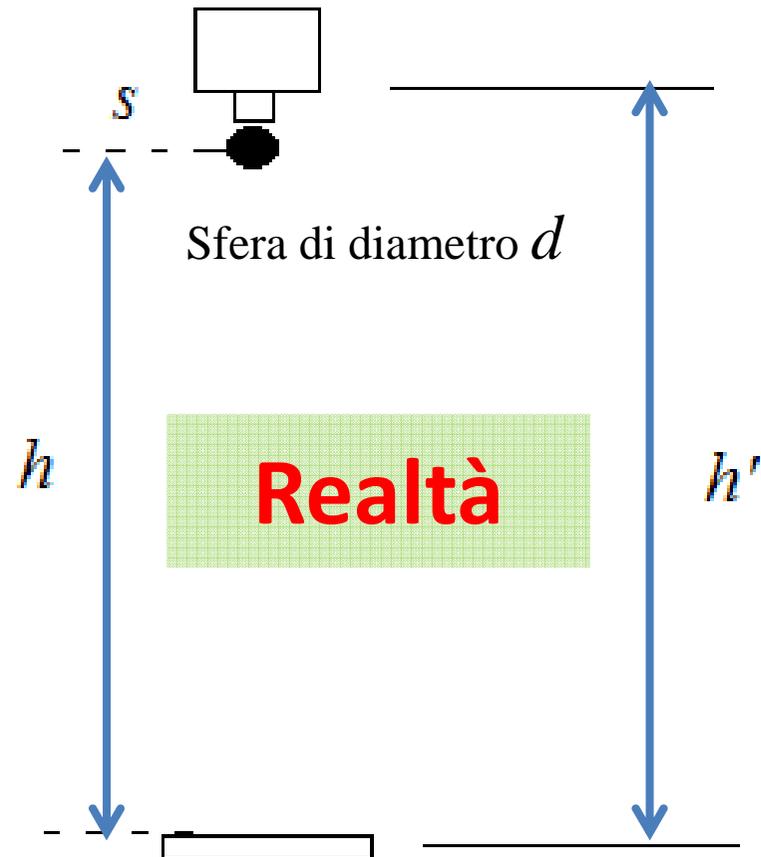
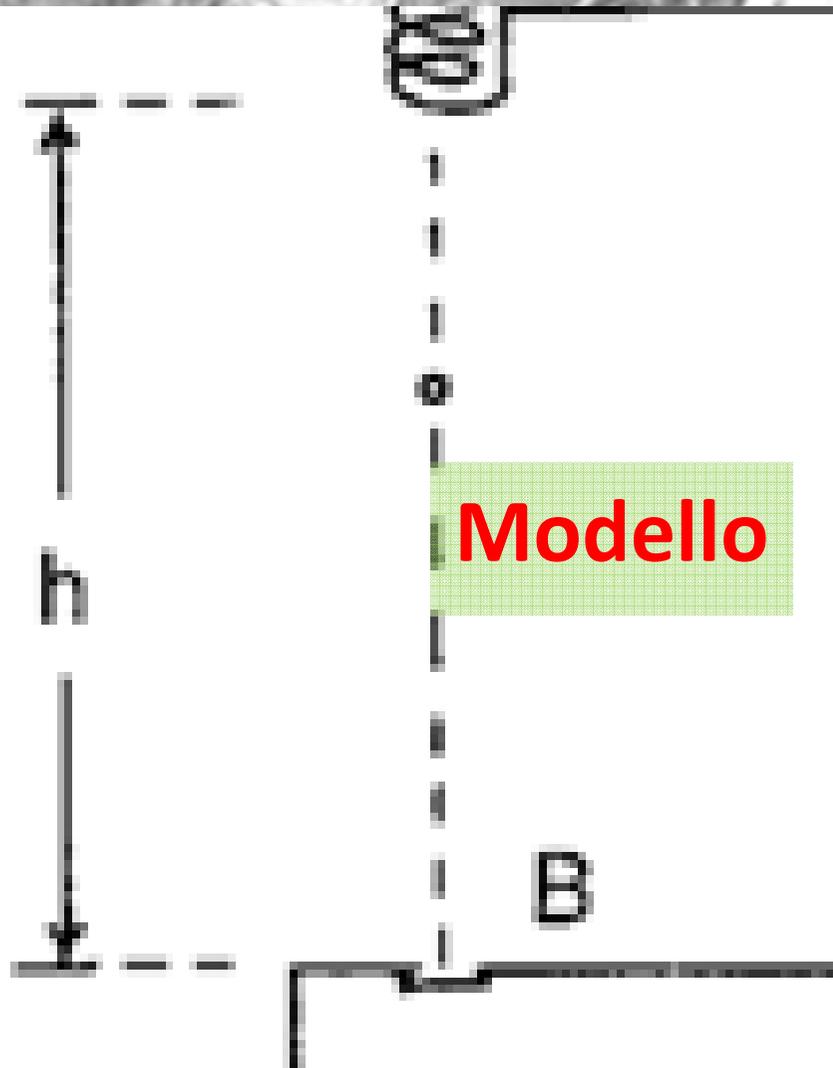
- Si propaga l'incertezza totale relativa:

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta n_{un}}{n_{un}} \equiv \frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{\bar{n}} + \frac{\delta n_{un}}{\hat{n}_{un}}$$

– δn vedi situazione osservata (Gauss, non Gauss).

– $\frac{\Delta n_{un}}{2}$ semidisersione \equiv incertezza di lettura (ε).

Per misurare g oltre a t serve h



Incertezza su h

- Ovviamente misure sull'apparato
 - Si osserva che l'interruttore si attiva, quando metà sferetta entra nell'interruttore.

$$h = h' - s - \frac{d}{2}$$

$$\delta h = \varepsilon_{h'} + \varepsilon_s + \frac{1}{2} \varepsilon_d$$

- Solo incertezze di lettura: h misurata con regolo, s e d misurati con calibro.

Accettiamo il valore atteso?

