0.4 Misura dell'accelerazione di un corpo con un piano inclinato

premessa

Un corpo solido che rotola lungo un piano inclinato (cilindro o sfera) come indicato in figura 5 può essere studiato considerando una rotazione intorno ad un asse orizzontale per P (asse istantaneo di rotazione), o composto da una traslazione del centro di massa e di una rotazione intorno ad un asse orizzontale passante per C. Le forza agenti sul corpo sono P (forza peso) e R reazione vincolare.

La sollecitazione equivale ad una forza (pari alla somma delle due) applicata al centro di massa e ad una coppia. Le componenti normali al piano sono uguali ed opposte pertanto la risultante $\mathbf{F}$ è diretta lungo s ed è pari a

$$F = mg \sin\theta - A$$

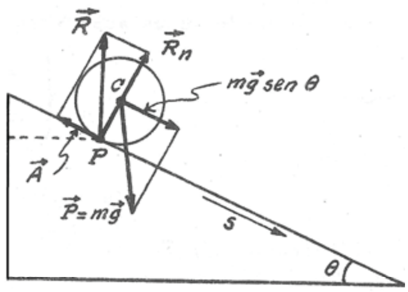

Figura 5: Diagramma delle forze nel caso di un corpo in rotazione su un piano inclinato.

dove A è la componente orizzontale della reazione al vincolo (ovvero la forza di attrito). L'attrito cosiddetto di rotolamento si origina per effetto della deformazione dei corpi a contatto, in questa situazione si può condurre il calcolo come se la forza di attrito fosse la forza radente statica (in quanto è applicata a punti in quiete sull'asse istantaneo di rotazione). Il momento risultante delle forze applicate rispetto a C è diretto come e nel verso dell'asse di rotazione ed ha intensità:

$$M = Ar$$

con r raggio del corpo. Le equazione cardinali possono scriversi nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = m\frac{dv_c}{dt} = mg\sin\theta - A & \text{equazione delle forze} \\ Ar = \frac{db}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} & \text{equazione dei momenti} \end{cases} \tag{6}$$

Per solidi di forma sferica ed un di forma cilindrica i rispettivi momenti rispetto all'asse sono dati dalle relazioni $I_{sf.} = 2/5 \cdot mr^2$ e $I_{cil} = 1/2\ cdotmr^2$, $I_{tubo} = 1/2 \cdot m(r_1^2 + r_2^2)$, inoltre, dato che $v_c = \omega r$, si può scrivere la seconda delle equazioni 6 come

$$A \cdot r^2 = I \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

Si ottiene quindi dalle lle equazioni 6

$$\begin{cases} \text{sfera} & A = \frac{2}{5}m\frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow & a = \frac{5}{7}g\sin\theta \\ \text{cilindro} & A = \frac{1}{2}m\frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow & a = \frac{2}{3}g\sin\theta \\ \text{tubo} & A = \frac{1}{2}m(\frac{r_1^2}{r_2^2}+1)\frac{dv_c}{dt} & \text{inserita nella prima} \Rightarrow & a = \frac{2}{3}\frac{r_2^2}{r_2^2+r_1^2/3}g\sin\theta \end{cases}$$

Si vede che l'intensità dell'accelerazione nel moto roto-traslatorio risulta per la sfera 5/7 (2/3 per il cilindro) di quella, che avrebbe un corpo che scendesse lungo un piano inclinato della stessa pendenza.

Esecuzione

Per misurare l'accelerazione lungo il piano inclinato sono disponibili due traguardi, equipaggiati con due interruttori ottici. Quando il corpo passa dal primo interruttore avvia un timer, che viene fermato al passaggio del corpo del secondo interruttore.

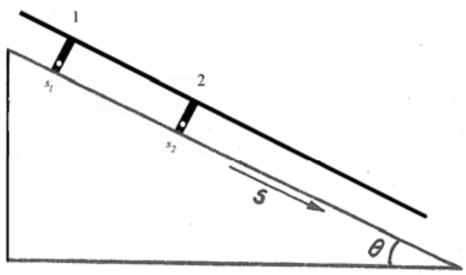

Figura 6: Piano inclinato equipaggiato con due traguardi: 1) fisso, 2) mobile.

La misura del tempo viene registrata acquisita da un computer e registrata. Se studiamo il moto del corpo lasciato libero all'inizio del piano inclinato, osserviamo che possiamo misurare la distanza tra i due traguardi Δs ed il tempo, che impiega il corpo a percorrete tale distanza Δt. Il rapporto $\Delta s/\Delta t$ è la velocità media. Spostando il secondo traguardo si può quindi misurare la velocità media. Assumiamo che la velocità che il corpo ha al primo traguardo sia v_1 e che la velocità nei traguardi successivi sia v_n, dove per $n = 1, 2, 3, ...$ indichiamo le possibili posizioni del secondo traguardo. La velocità media $v_m = \Delta s/\Delta t$ risulta aumentare in modo lineare con il tempo. Questo implica che la variazione della velocità sia costante. In tali condizioni sappiamo che la velocità media può essere data come $v_m =(v_1 + v_n)/2$ per qualsiasi posizione n. Pertanto si ottiene $v_m = (v_1 + v_1 + at)/2$, ovvero si osservi che

$$v_m = v_1 + \frac{1}{2}at \tag{7}$$

Si può quindi derivare l'accelerazione di un corpo solido, che rotoli su un piano inclinato, dallo studio della dipendenza della velocità media in funzione del tempo secondo la relazione $y = A + Bx$. L'accelerazione sarà quindi data da $a = 2 \cdot B$.

Si potrebbe eventualmente studiare la relazione di $\Delta s = v_1 t + 1/2at^2$ e applicare il metodo dei minimi quadrati alla regressione polinomiale.

Stima degli errori

La stima degli errori a priori si basa principalmente sugli errori di sensibilità di lettura della riga graduata che permette la misura della distanza tra i due traguardi e della risoluzione del timer.

Errori a priori

Se assumiamo di fare una stima a priori dedotta dalla semplice pendenza della curva che si suppone di poter ottenere a si potrebbe supporre incerta secondo la relazione

$$a = 2\frac{\Delta v_m}{\Delta t}, \text{ quindi } \frac{\delta a}{a} = \frac{\delta(\Delta v_m)}{\Delta v_m} + \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

dove si tenga conto che

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ quindi } \frac{\delta v_m}{v_m} = \frac{\delta(\Delta s)}{\Delta s} + \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

.

Dove l'errore totale risulta dalla opportuna manipolazione degli errori di sensibilità di lettura e di precisione.

A posteriori

A posteriori si potrebbe verificare su una distanza intermedia che la variabile tempo sia casuale ,quindi prendere 100 dati e fare la verifica del $\tilde{\chi}^2$ per il caso della distribuzione normale attesa. E quindi effettuare un numero di misure per distanza tra i traguardi sufficiente 10–20, e propagare quindi gli errori di tipo casuale. Una volta dedotta con il metodo dei minimi quadrati che la relazione lineare descrive i dati sperimentali, si può procedere nella estrazione dell'accelerazione dal parametro B della curva trovata. Dedotta l'accelerazione si può quindi fornire la confidenza che il valore teorico atteso sia in accordo con quanto misurato.