Ma anche presso le scuole

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \equiv g = \frac{2h}{t^2}$$

h misurato come differenza tra due punti, con scala graduata di risoluzione 1 mm

t misurato sul display come 0.000 s, risoluzione 0.001 s.

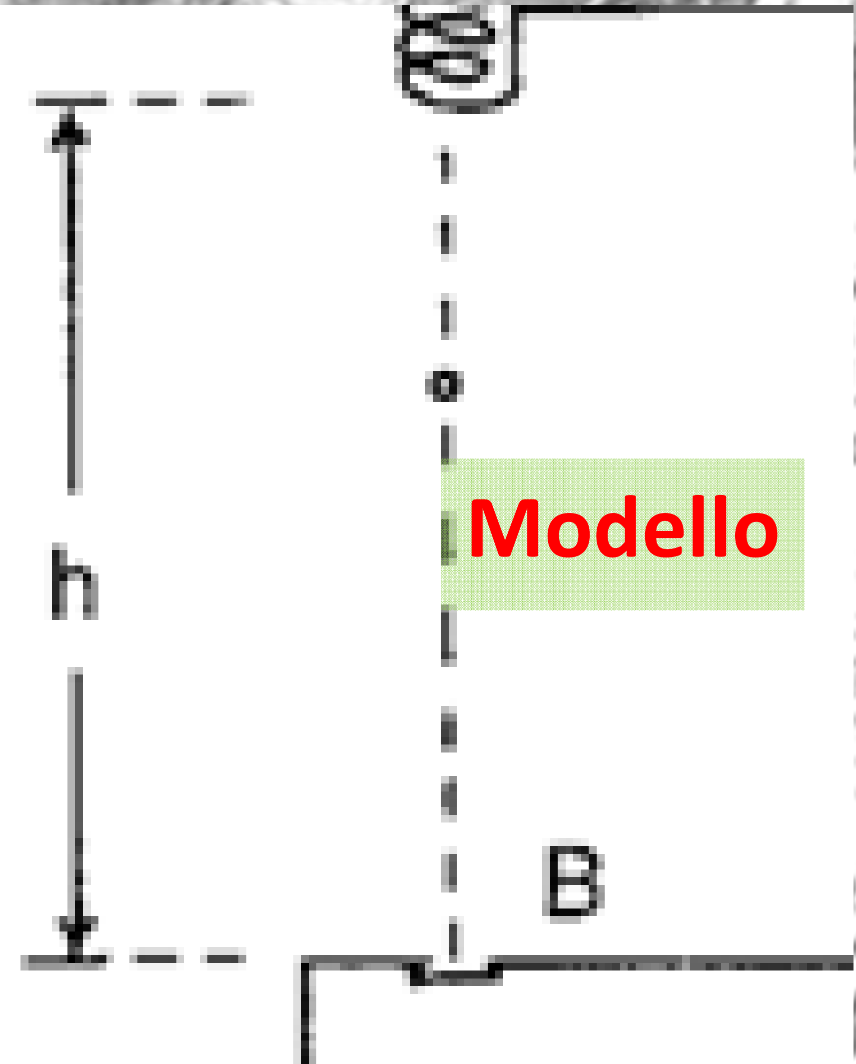
$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t}{t}$$

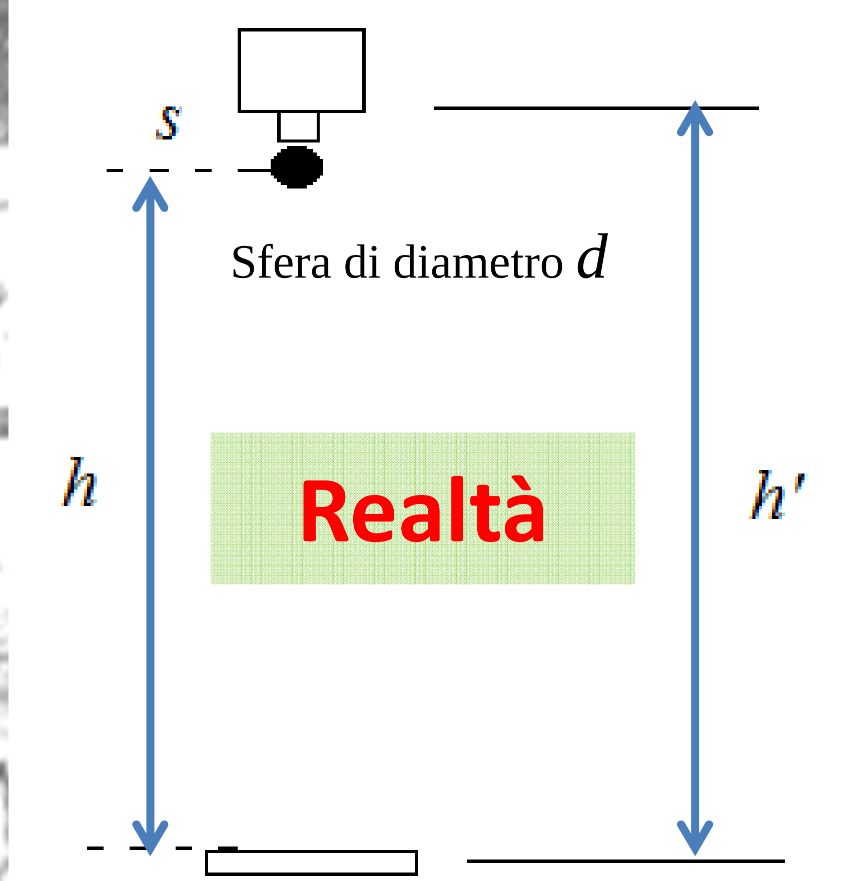
$$\frac{\delta g}{g} = 0.001 + 0.002$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{1 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm}} + 2\frac{0.0005 \text{ s}}{0.450 \text{ s}}$$

$$\approx 3 \text{ su } 1\,000$$

Per misurare g oltre a t serve h





Incertezza su *h*

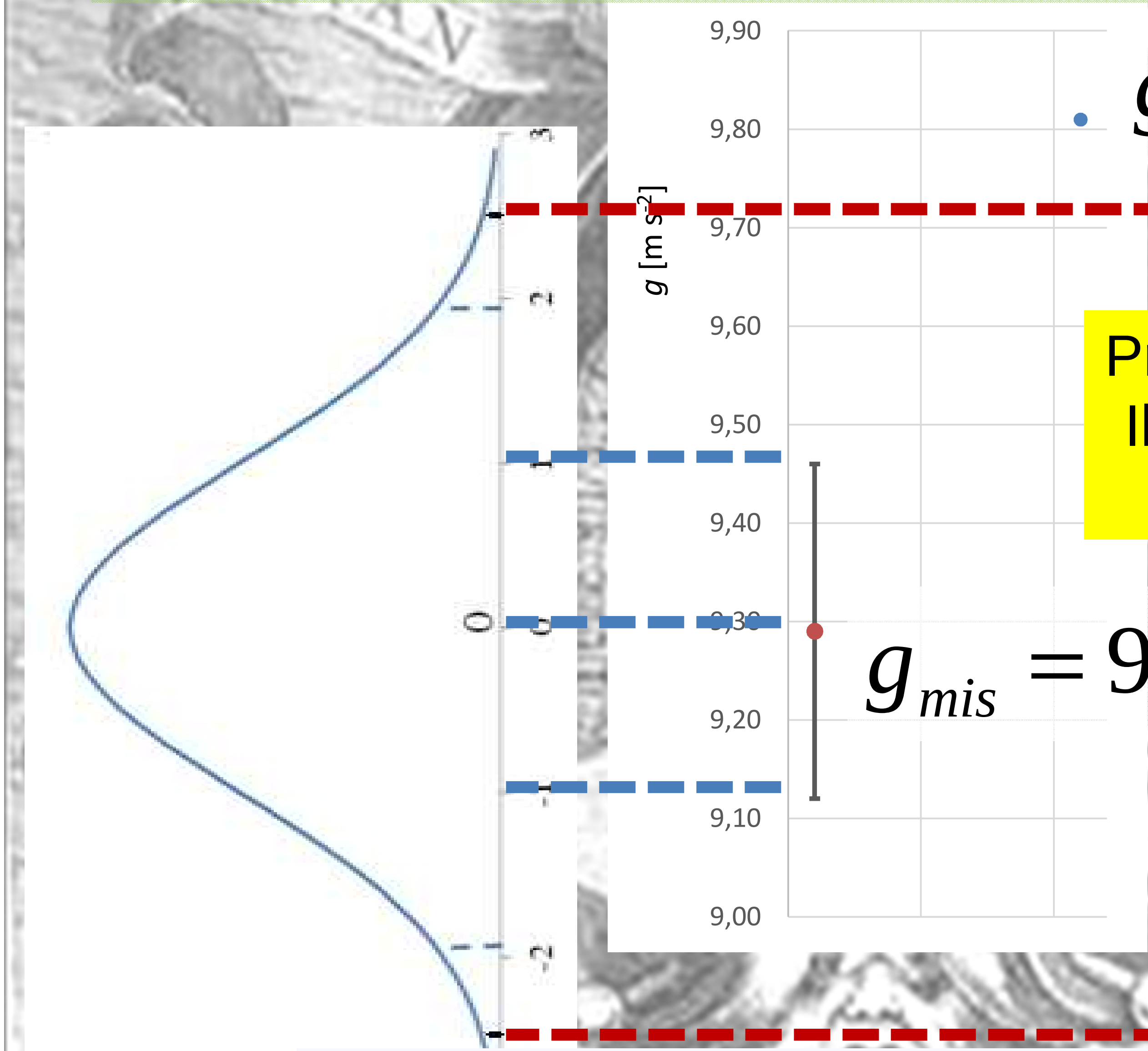
- Ovviamente misure sull'apparato
  - Si osserva che l'interruttore si attiva, quando metà sferetta è dentro.

$$h = h' - s - \frac{d}{2}$$

$$\delta h = \varepsilon_{h'} + \varepsilon_s + \frac{1}{2}\varepsilon_d$$

  - Solo incertezze di lettura: *h* misurata con regolo, *s* e *d* misurati con calibro.

Accettiamo il valore atteso?



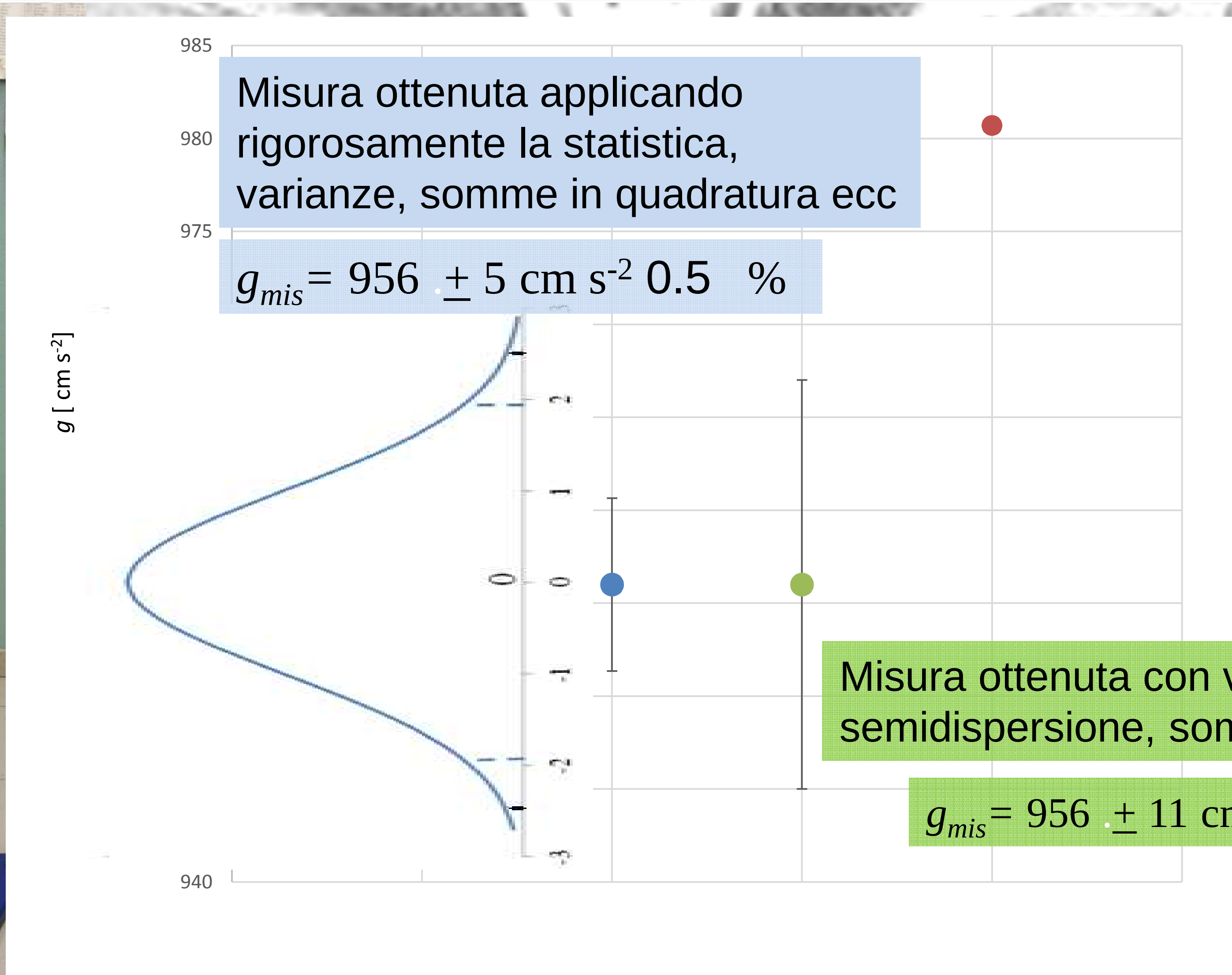
$$g_{att} = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Probabilità di ottenere
Il valore fuori minore
del 1 %

$$g_{mis} = 9.29 \pm 0.17\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Con il pendolo g = 9.8 $\pm$ 0.6 m s^{-2}

h	δh										
[cm]	[cm]		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50.0	0.1	t [s]	0.324	0.323	0.324	0.324	0.324	0.323	0.324	0.323	0.323	0.323



Misura ottenuta applicando rigorosamente la statistica, varianze, somme in quadratura ecc

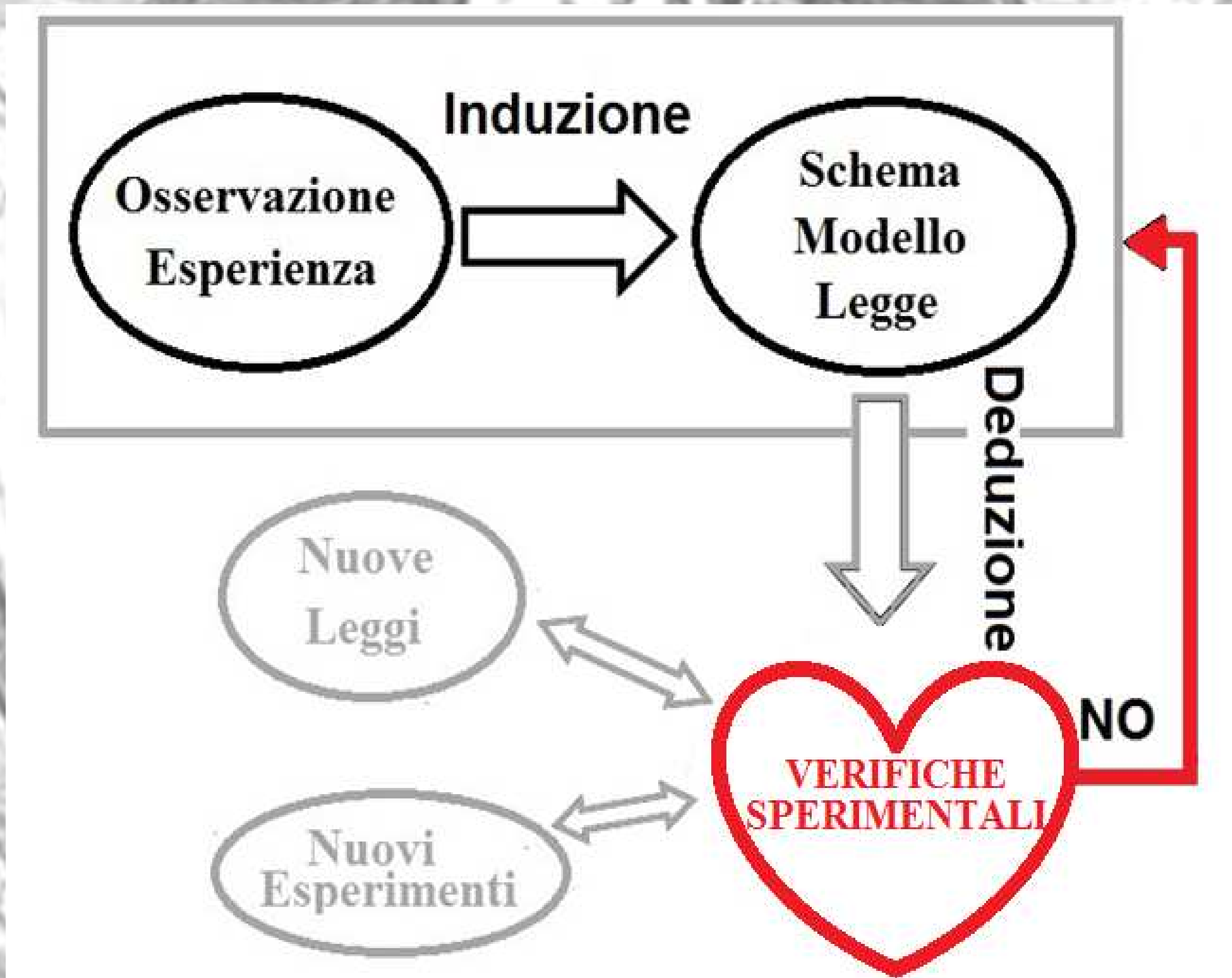
$g_{mis} = 956 \pm 5$ cm s^{-2} 0.5 %

Misura ottenuta con val. centr. e semidispersione, somme lineari.

$g_{mis} = 956 \pm 11$ cm s^{-2} 1.2 %

Verifica altamente significativa … modello da rigettare …

Devo ricontrollare le ipotesi e trovare un altro modello



Qualcosa non torna: accuratezza

I problemi del laboratorio sono tanti:

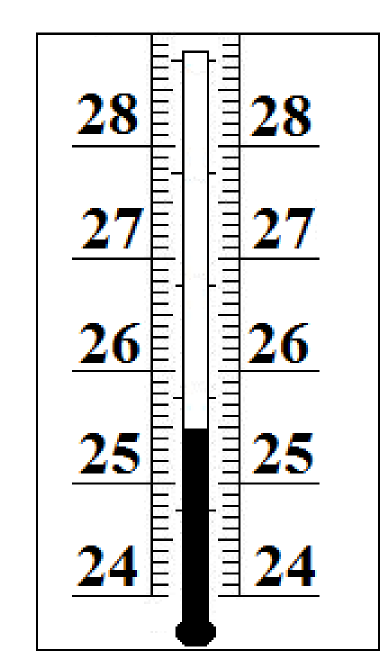
- bisogna conoscere bene il modello,
  - **e verificare che sia adatto al fenomeno osservato.**

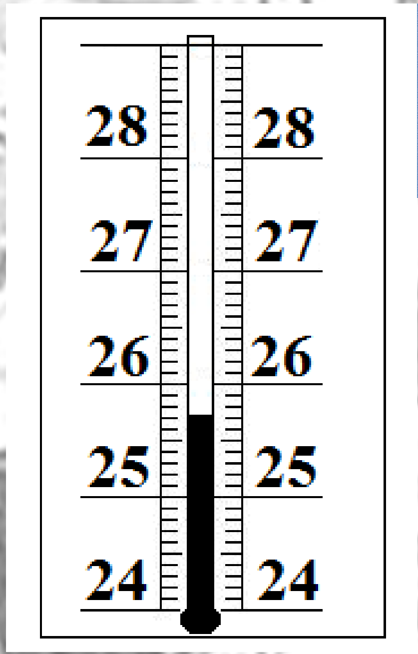
Cosa ancora più problematica:

bisogna tenere sotto controllo ogni strumento e

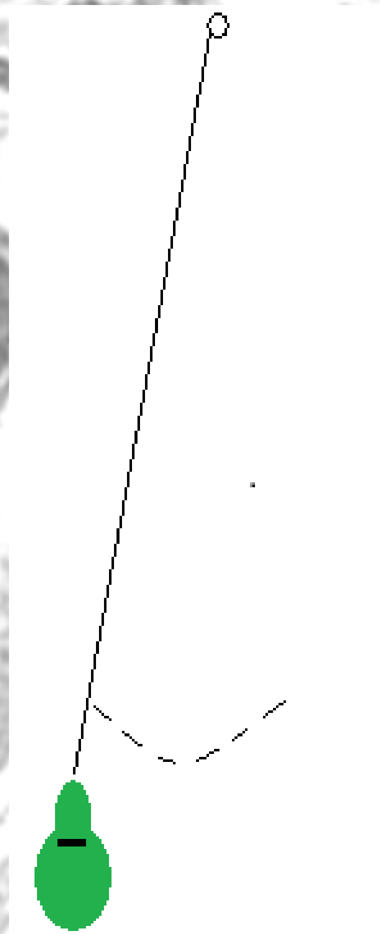
- **verificarne il funzionamento.**
- **Richiede tempo pazienza e … dimestichezza.**

Infatti abbiamo cercato di fare una misura più precisa, utilizzando elettronica.
La misura ha un grado di precisione maggiore,
ma risulta meno accurata di un semplice pendolo





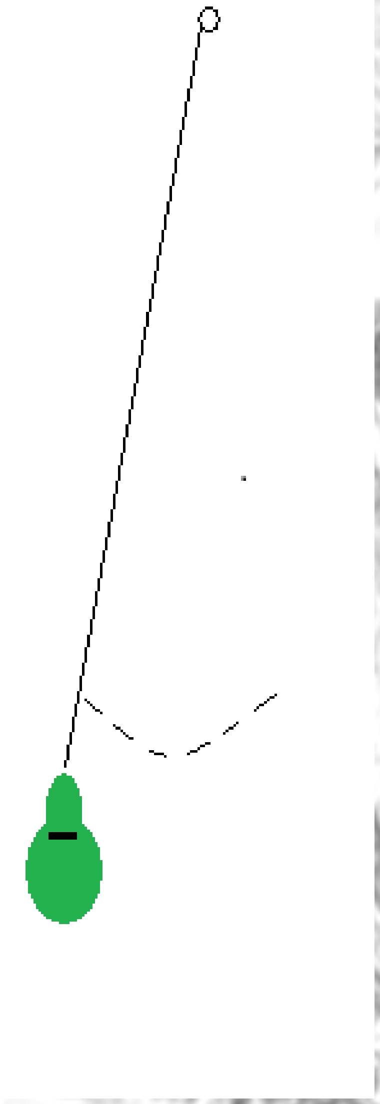
Qui ho evidenziato io l’incertezza di accuratezza, confrontando due termometri.



Se aumenta la precisione nella misura di g con il pendolo, più oscillazioni per esempio, dovrei rigettare l’ipotesi.

Anche qui ho reso evidente l’eventuale incertezza di accuratezza,
Sul corpo che sto usando non sono sicuro dove si trovi il centro di massa

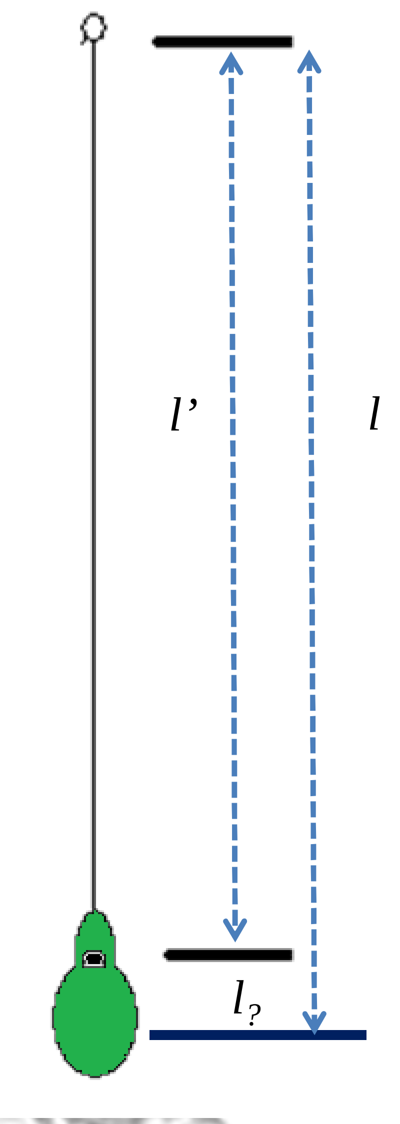
Verifica di una legge e … calibrazione.



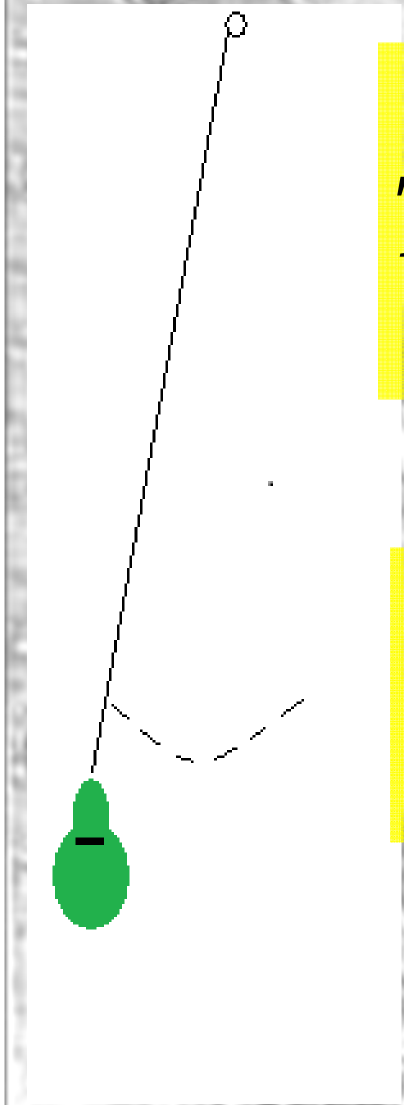
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Qual è il baricentro?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'+l_?}{g}}$$

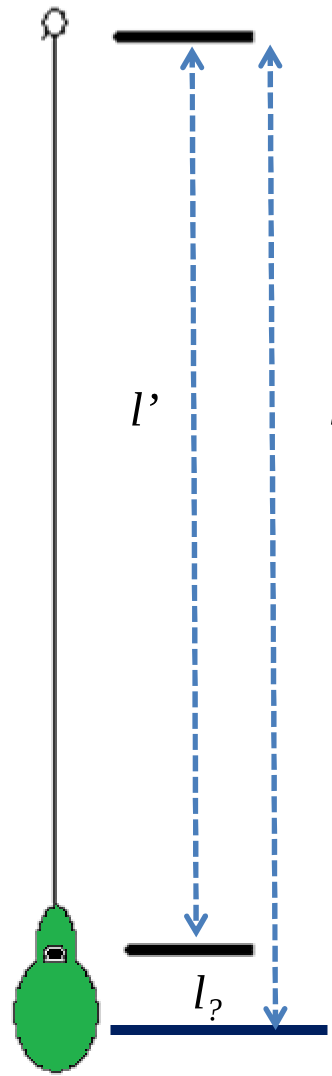


Verifica di una legge e … calibrazione.



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l' + \frac{4\pi^2}{g} l_?$$

$$y = Bx + A$$



Allora torno al mio problema nascosto

- Pensiamo sia un ritardo nel rilascio della sferetta dall'elettromagnete?
  - Applichiamo un altro modello,
  - $$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2$$
  - Ovvero pensiamo che l'elettronica possa introdurre un ritardo e/o il contatore possa contare in anticipo rispetto alla caduta del grave.
  - Sarà la calibrazione a dirci come stanno le cose.
  - **Dobbiamo trovare il modo di estrarre t_0 senza coinvolgere altre grandezze: calibrazione.**

Per fare questo: regressione lineare

La regressione lineare può servire per estrarre misure, sulla base di una relazione tra grandezze misurate direttamente e/o per calibrare gli strumenti sulla base di un modello.

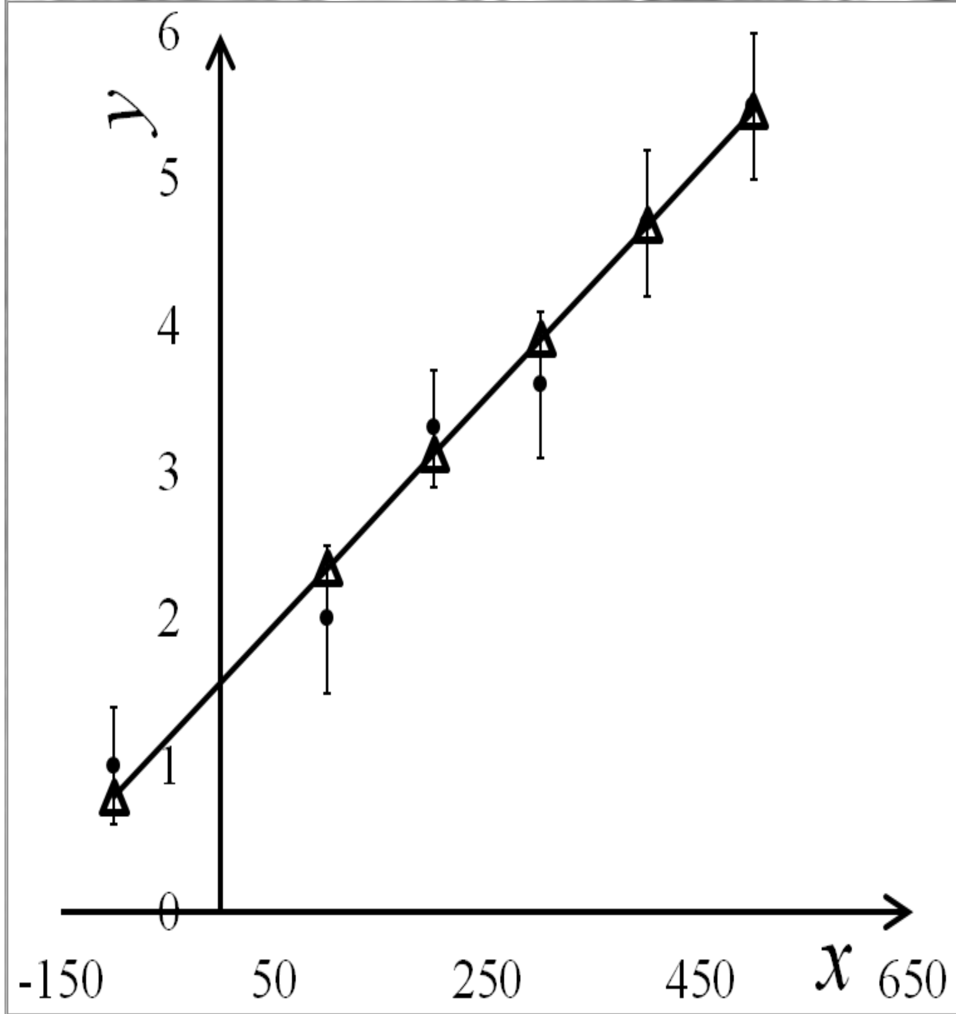
Possiamo affrontare la verifica di una legge

Per me è l'argomento più attraente e che si può proporre anche alle scuole superiori, con piccole licenze «didattiche».

Partiamo dal caso generale

$$y = A + Bx$$

Quando accettiamo un modello?



Modello-legge,

- Linea continua

- Dati sperimentali
  - punti con simboli

Per motivi didattici riportiamo con triangoli i valori Y_i dedotti dalla legge per ogni x_i

Come accettavamo un dato?

Se il valore atteso rientrava nell'intervallo della nostra misura nell'intervallo definitio dall'incertezza.

Per una legge?

Accettiamo che «in media» ogni valore atteso Y_i (dedotto dalla legge) rientri nell'intervallo $(y_i) \pm \delta y_i$.

Questo deve essere minimo

- Quindi $|Y_i - y_i| \leq \delta y_i$

$$\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i} \right)^2 \leq 1$$

$$\sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i} \right)^2 \leq N$$

$$\min \left\{ \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i} \right)^2 \right\}$$

Metodo dei minimi quadrati

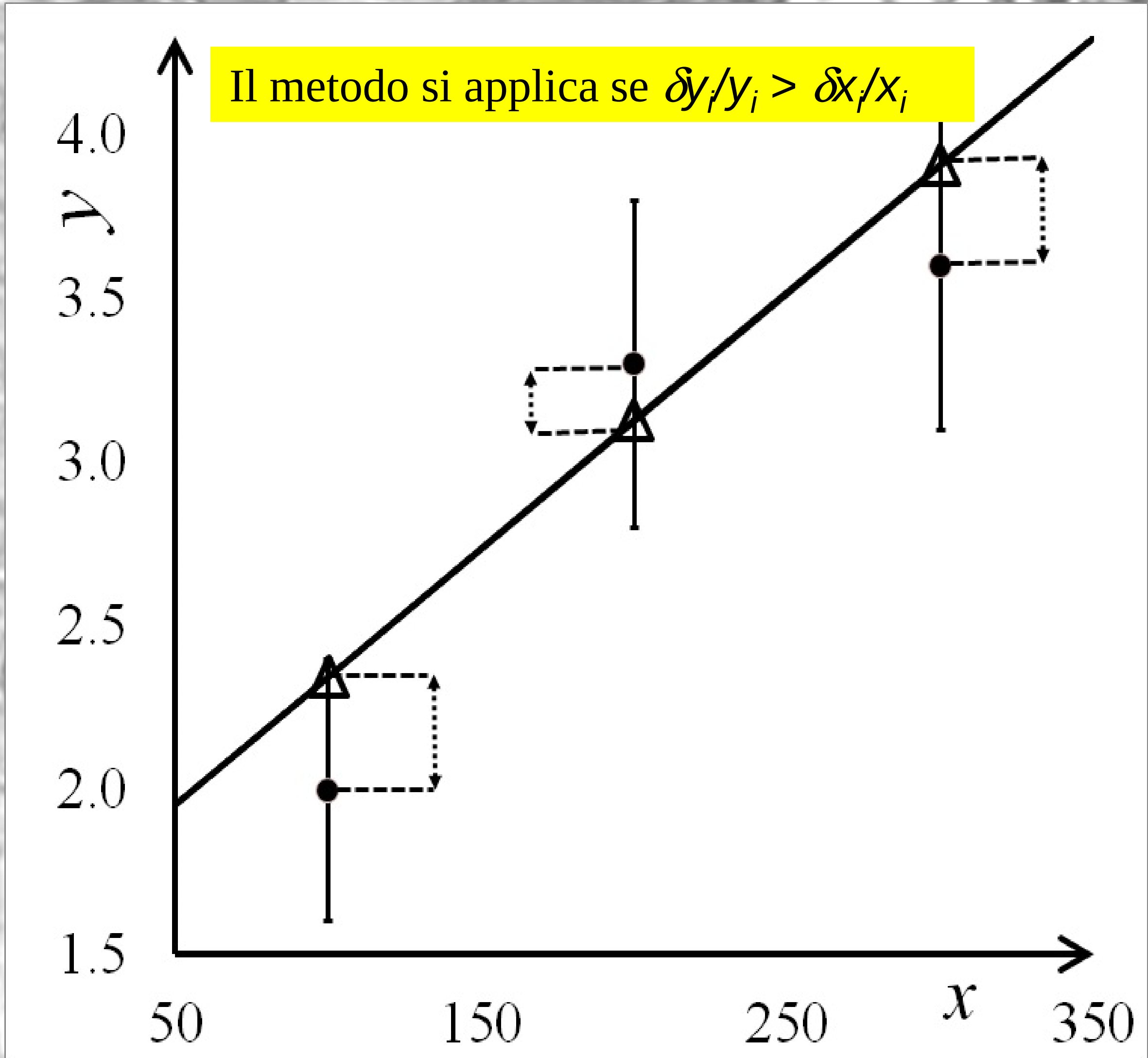
Stesso risultato con … altro

- Considero ogni misura gaussiana e studio la probabilità che una legge teoria sia appropriata per ogni valore osservato

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) \propto e^{-\sum (y_i - Y_i)^2 / 2\sigma_i^2}$$

$$\min\left\{ \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i} \right)^2 \right\}$$

Ricavo la retta



Fogli di calcolo

O

Stima

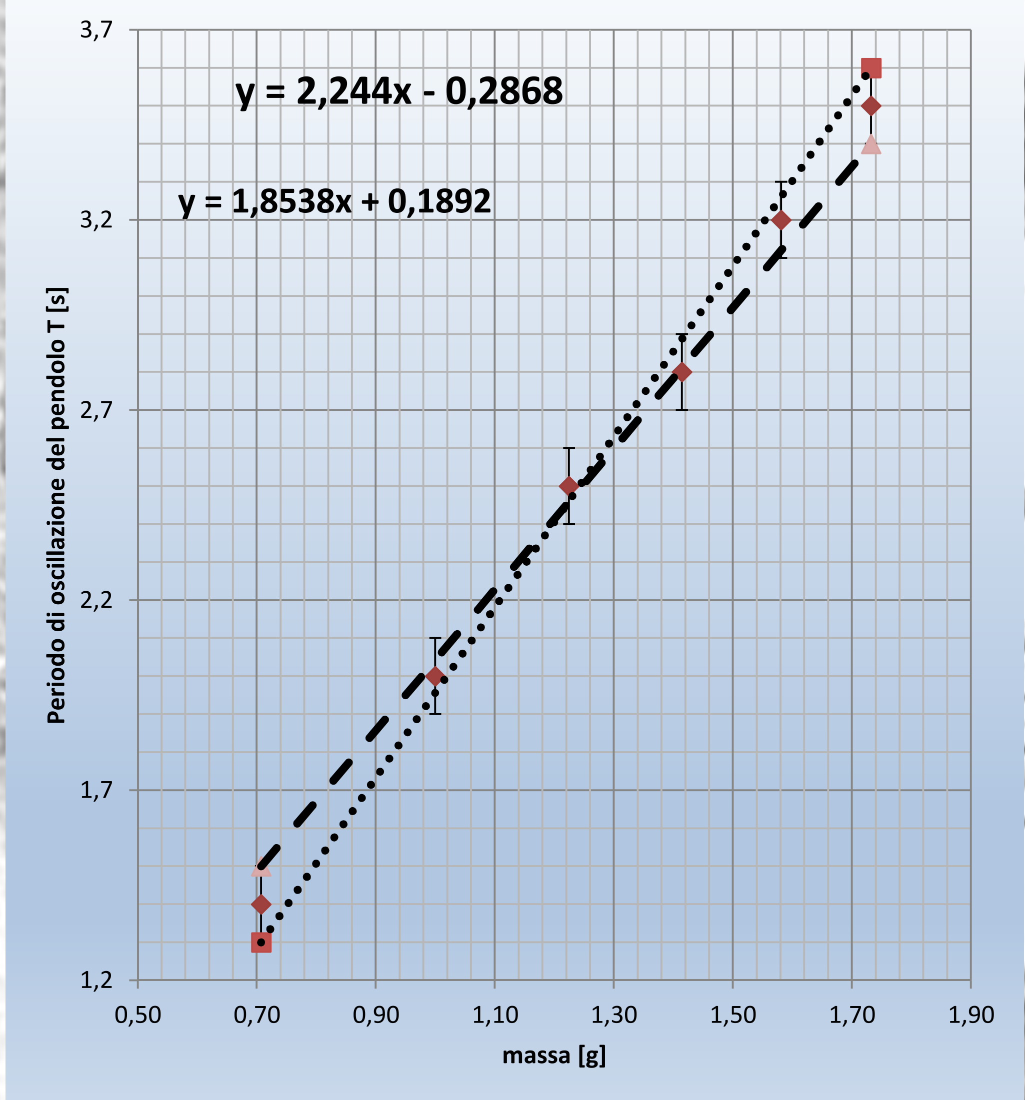
Valori centrali

E

semidispersione

Sto lavorando solo sulle *y*:
Metodo valido per incertezze relative su *y* > di quelle su *x*

Stima dei parametri grossolana per le scuole



Pendenza massima punteggiata $y_{max} = A' + B_{max}\, x$ da $y_1 - \delta y_1$ e $y_4 + \delta y_4$ e pendenza minima $y_{min} = A'' + B_{min}\, x$

B_{ms} *valore centrale*

δB = *semidispersione*

A_{ms} *valore centrale*

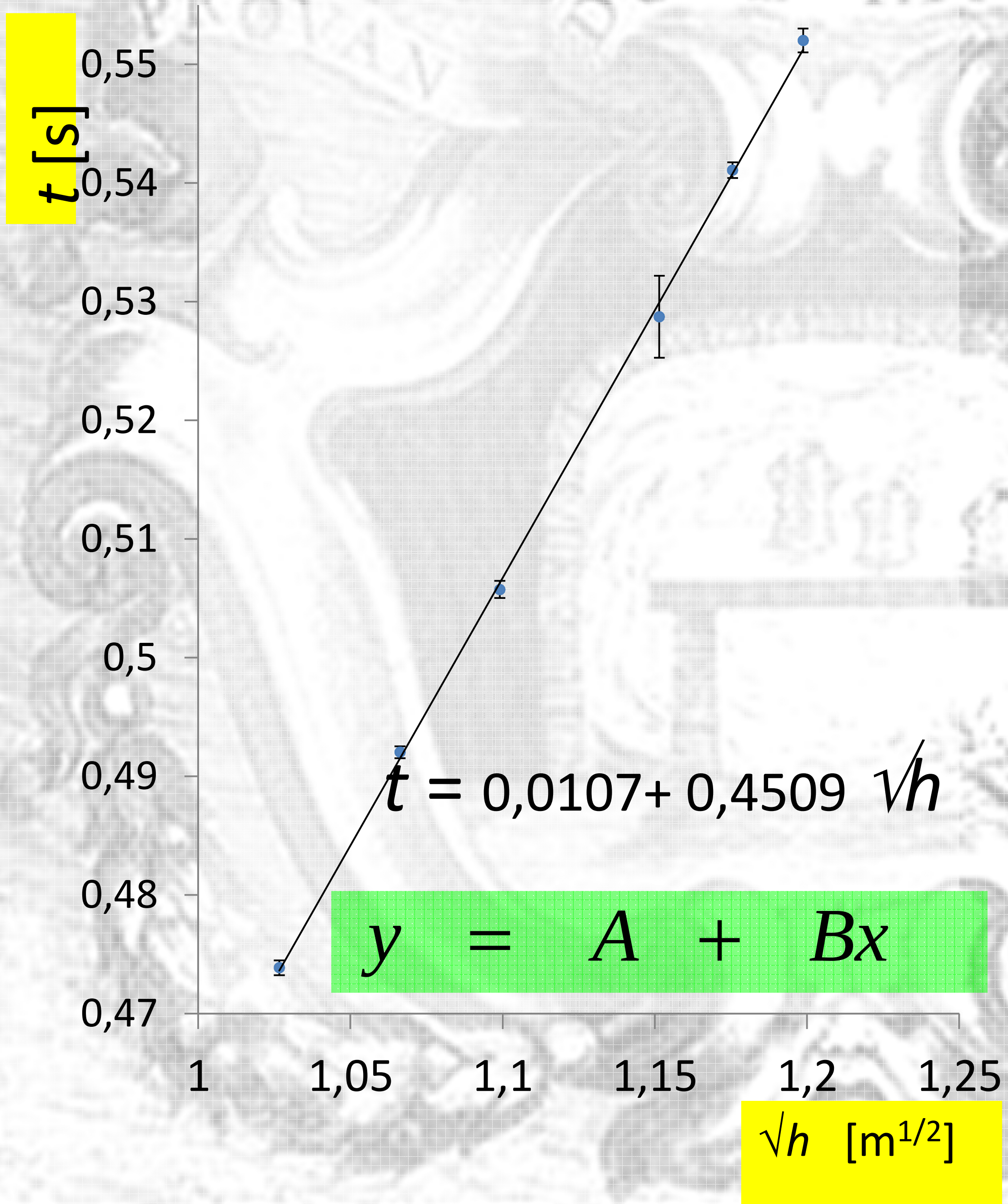
δA = *semidispersione*

Esplicito *t* in fuzione di *h*

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 \Rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{\frac{1}{2} g} (t + t_0)$$

$$\sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} = t + t_0$$

$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h} \equiv y = A + B \cdot x$$



$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}$$

t_0 = - 0,0107 s

t_0 = - 10.7 ms

Il contatore parte in anticipo: l'elettromagnete sgancia la sferetta in ritardo, rispetto all'interruttore elettrico, che commuta "simultaneamente" l'impulsatore sul contatore.

Adesso la misura "corretta" di *g*

- Dalla relazione

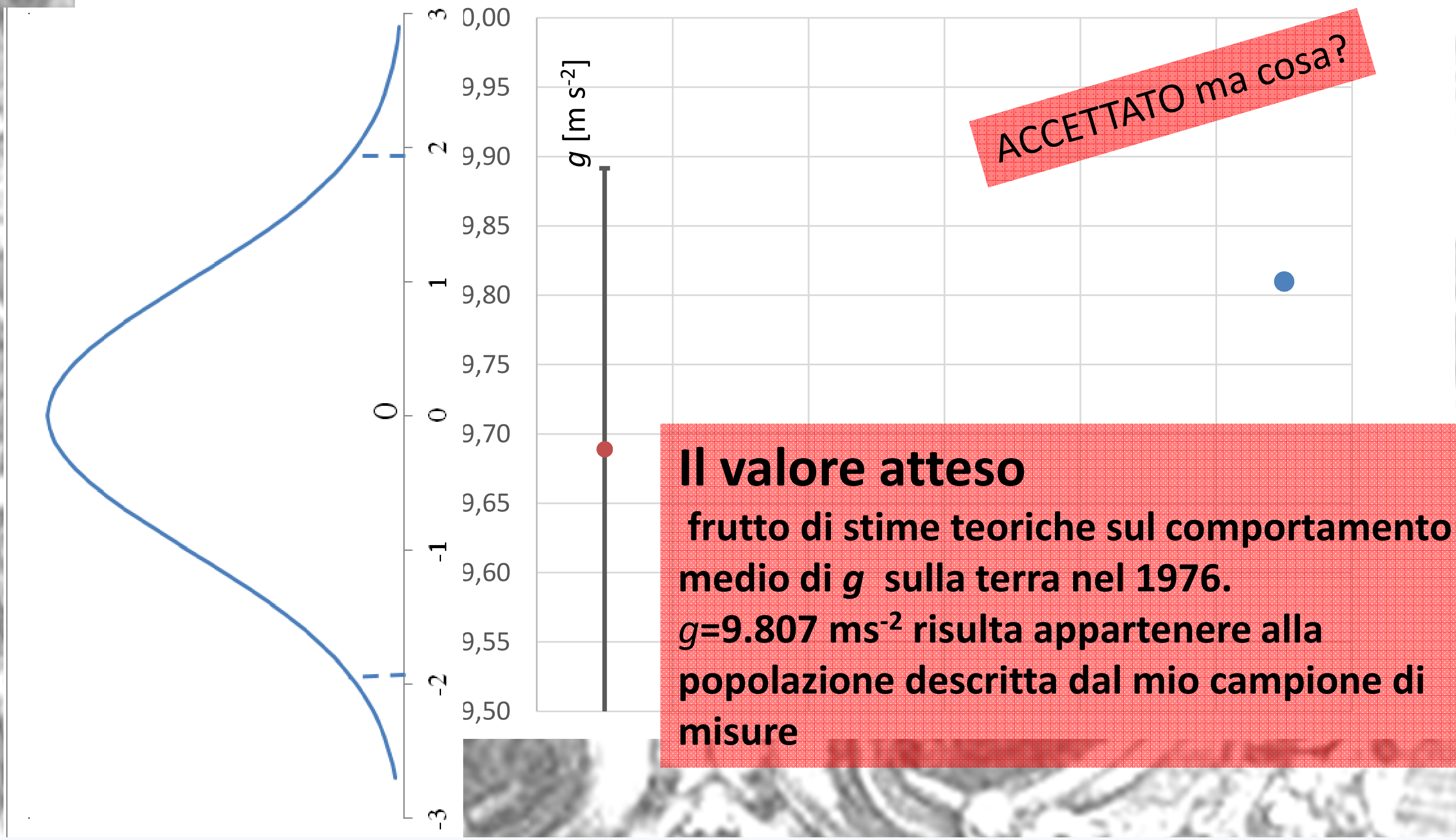
$$g = \frac{2h}{(t+t_0)^2} \qquad \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\,\frac{\delta t + \delta t_0}{t+t_0}$$

  - Ovviamente ho un'incertezza anche su t_0

$$t_0 = -10.7 \pm 0.7 \;\; \text{ms}$$

$$g_{mis}(accurata) = 9.69 \pm 0.20\,\text{m s}^{-2}$$

Per il sistema in uso da noi funziona la calibrazione



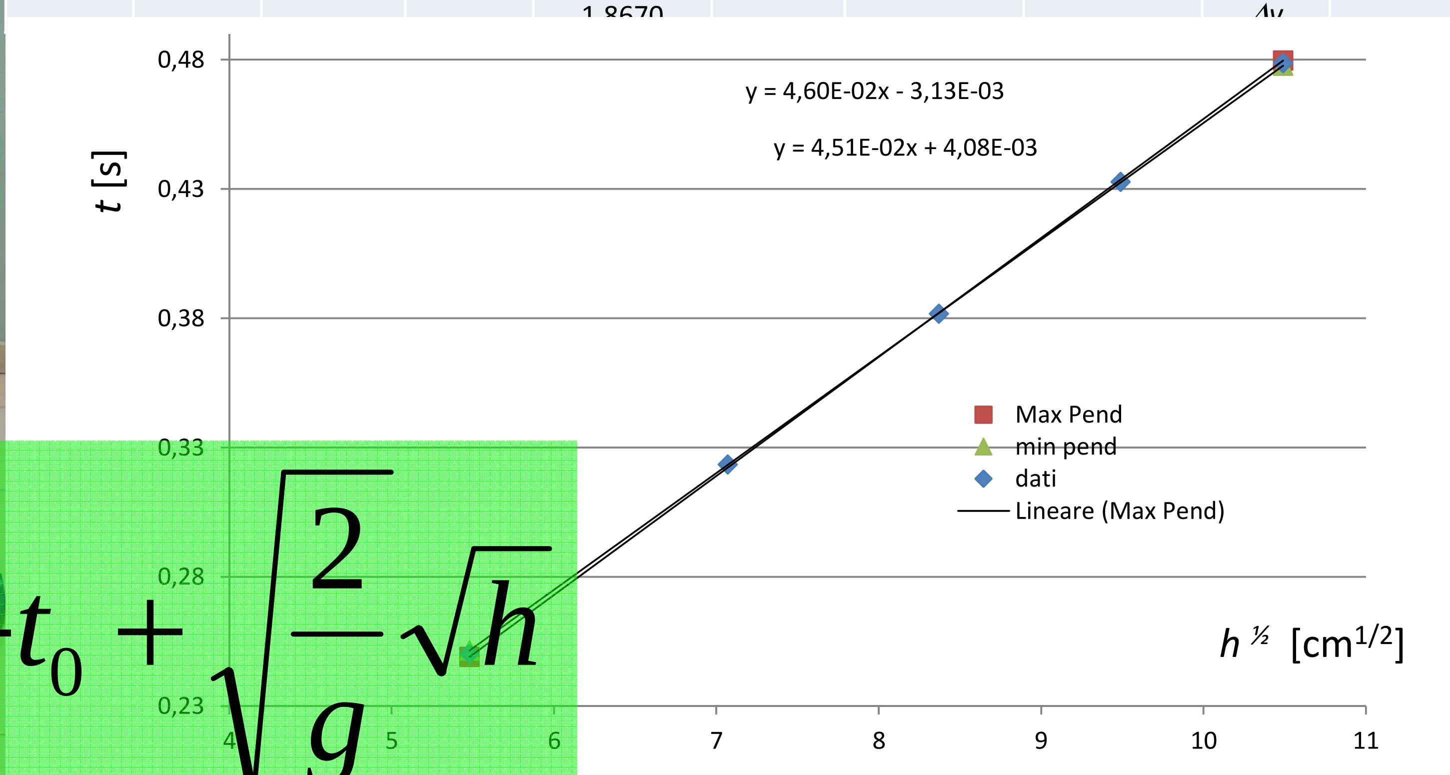
Il valore atteso

frutto di stime teoriche sul comportamento medio di *g* sulla terra nel 1976.
***g*=9.807 ms^{-2} risulta appartenere alla popolazione descritta dal mio campione di misure**

Ma dovrei anche verificare o fornire una stima, che il modello-legge, sia appropriata per i dati osservati.

	h	*dh*															
	[cm]	[cm]			1	2	3	4	5	6	7	8	9	media	dev. St. c.	t_{medio}	s_t
1	30.0	0.1	t [s]	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.251	0.252	0.250	0.250	0.250	0.250	0.00067	0.2503	0.0007
2	50.0	0.1	t [s]	0.324	0.323	0.324	0.324	0.324	0.323	0.324	0.323	0.323	0.323	0.3235	0.00053	0.3235	0.0005
2	70.0	0.1	t [s]	0.381	0.382	0.382	0.382	0.381	0.382	0.382	0.382	0.382	0.382	0.3818	0.00042	0.3818	0.0004
3	90.0	0.1	t [s]	0.433	0.433	0.433	0.433	0.432	0.432	0.433	0.433	0.432	0.433	0.4327	0.00048	0.4327	0.0005
4	110.0	0.1	t [s]	0.479	0.478	0.478	0.479	0.478	0.479	0.479	0.479	0.479	0.479	0.4787	0.00048	0.4787	0.0005

	x	δx	$\delta x/x$	y			δy	$\delta y/y$		
	$h^{1/2}$			t	σ_t	ε_t	δt		Max pend	Min pend
	[cm$^{1/2}$]	[cm$^{1/2}$]		[s]	[s]	[s]	[s]			
1	5.48	0.05	0.009	0.2503	0.0007	0.0005	0.0012	0.005	0.2491	0.2515
2	7.07	0.05	0.007	0.3235	0.0005	0.0005	0.0010	0.003		
3	8.37	0.05	0.006	0.3818	0.0004	0.0005	0.0009	0.002		
4	9.49	0.05	0.005	0.4327	0.0005	0.0005	0.0010	0.002		
5	10.49	0.05	0.005	0.4787	0.0005	0.0005	0.0010	0.002	0.4797	0.4777
				1.8670				Δy		



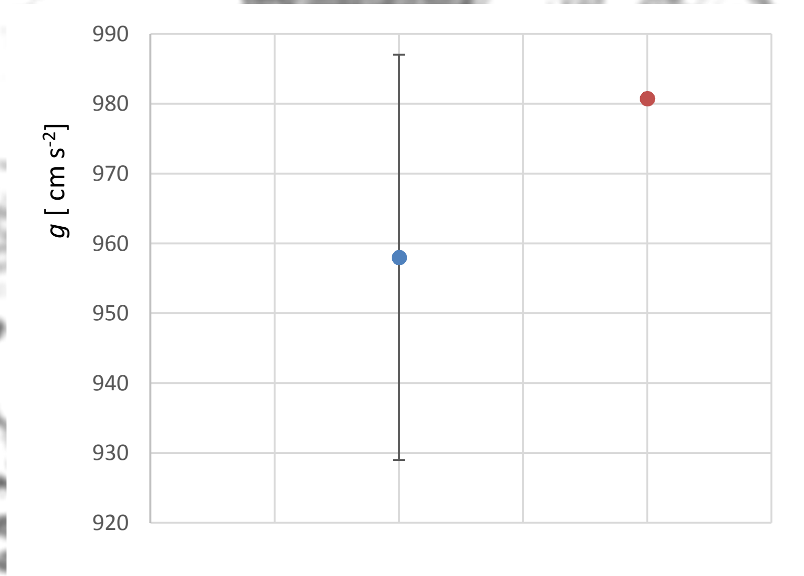
$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}$$

Calibrazione grossolana t_0= - 0.00047 $\pm$ 0.0036 s incertezza relativa 770 %

Calibrazione rigorosa t_0 = -0.0012 $\pm$ 0.0053 s incertezza relativa 440 %

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2$$

g_{mis}= 958 $\pm$ 29 cm s^{-2}



A posteriori … meglio per gli studenti

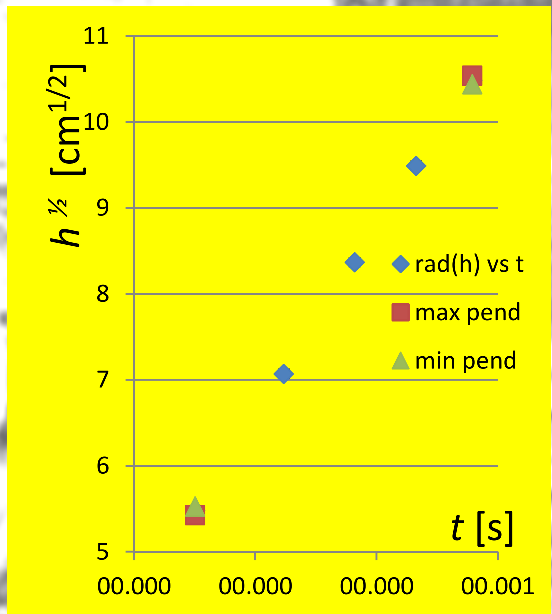
PRIMA	x	δx	$\delta x/x$	y			δy	$\delta y/y$			
ADESSO	y	dy	dy/y	x			δx	$\delta x/x$			
	$h^{1/2}$			t	σ_t	ε_t	δt		Max pend	Min pend	
	[$cm^{1/2}$]	[$cm^{1/2}$]		[s]	[s]	[s]	[s]				
1	5.48	0.05	0.009	0.2503	0.0007	0.0005	0.0012	0.005	5.4300	5.5300	
2	7.07	0.05	0.007	0.3235	0.0005	0.0005	0.0010	0.003			
3	8.37	0.05	0.006	0.3818	0.0004	0.0005	0.0009	0.002			
4	9.49	0.05	0.005	0.4327	0.0005	0.0005	0.0010	0.002			
5	10.49	0.05	0.005	0.4787	0.0005	0.0005	0.0010	0.002	10.5400	10.4400	

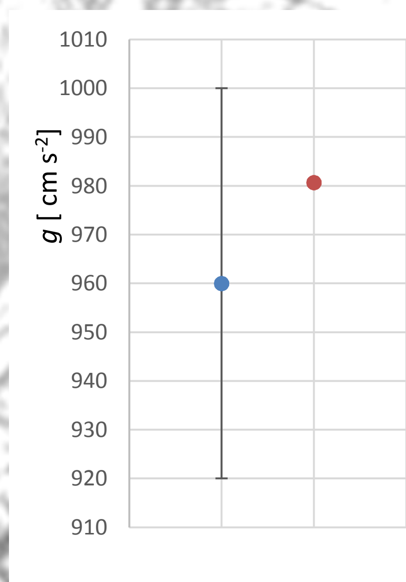
$B_{max}=$	$\Delta y_{Max}/\Delta x$	2.24E+01
$B_{min}=$	$\Delta y_{min}/\Delta x$	2.15E+01

$$B = \sqrt{g/2}$$
$$g = 2B^2$$

$$g_{mis} = 960 \pm 40 \text{ cm s}^{-2}$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{1}{2}g}\, t + \sqrt{\frac{1}{2}g}\, t_0$$





Semi conclusione

- Il problema fondamentale nelle misure in fisica è «individuare» le incertezze di accuratezza. Ma …
- La cosa appassionante è che bisogna «riprovare» ri-argomentare il modello fino a descrivere l’esperienza, o trovare un modello che ci «liberi» da tali incertezze.

Ci sono esperienze che possiamo condurre con facilità in classe?

- Sempre il pendolo: un sistema che utilizzo per introdurre la teoria degli errori per osservare grandezze "casuali", come visto
  - Posso prevedere qual è il periodo di oscillazione del pendolo?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Abbiamo fatto un'osservazione solo per una lunghezza *l*.

- PREVISIONI: su un cordino ed un piombo pescato a 15 m di profondità ad Otranto, di fronte alla ex cava di Bauxite.

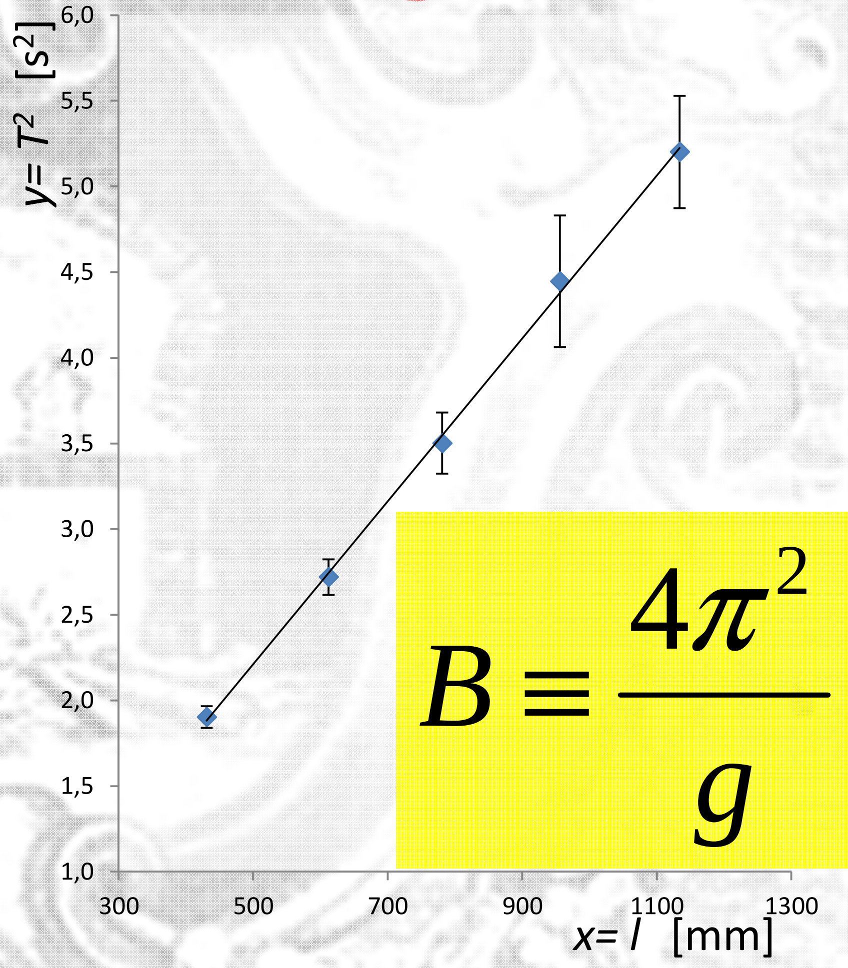
Per l ~ 1.15 m si ha $T = 2.15$ s.

Verifichiamo se la legge va bene per i dati e misuriamo anche *g*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l' + l_?}{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l' + \frac{4\pi^2}{g} l_?$$

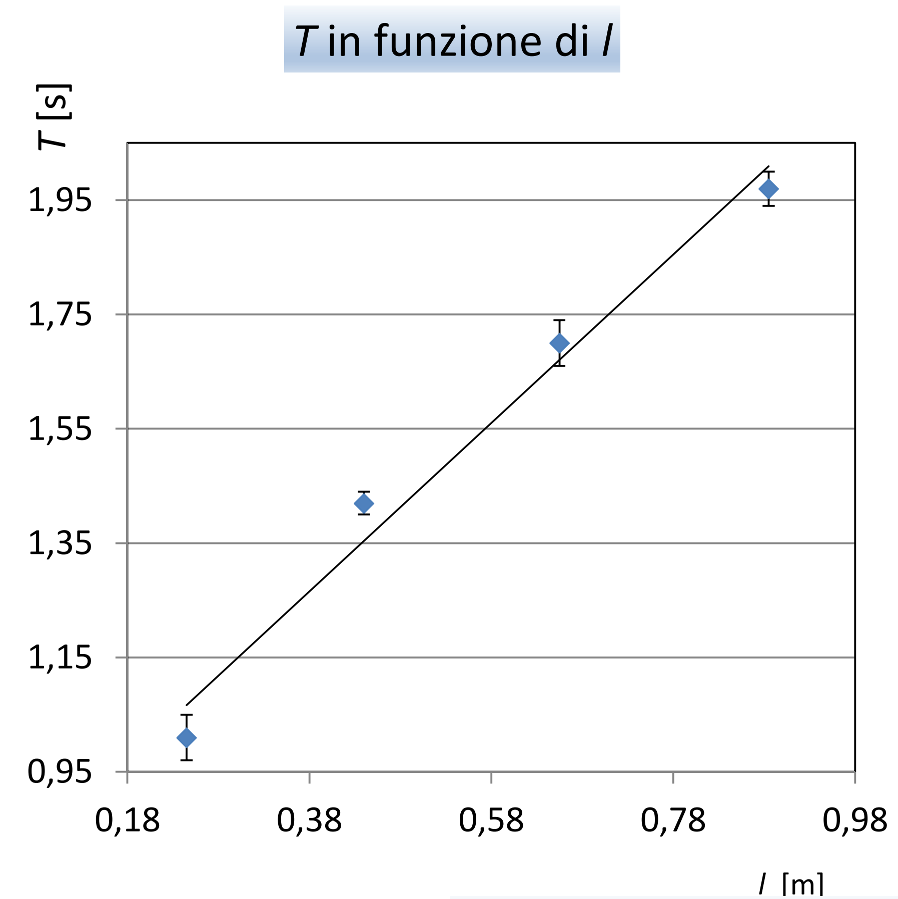
$$y = Bx + A$$

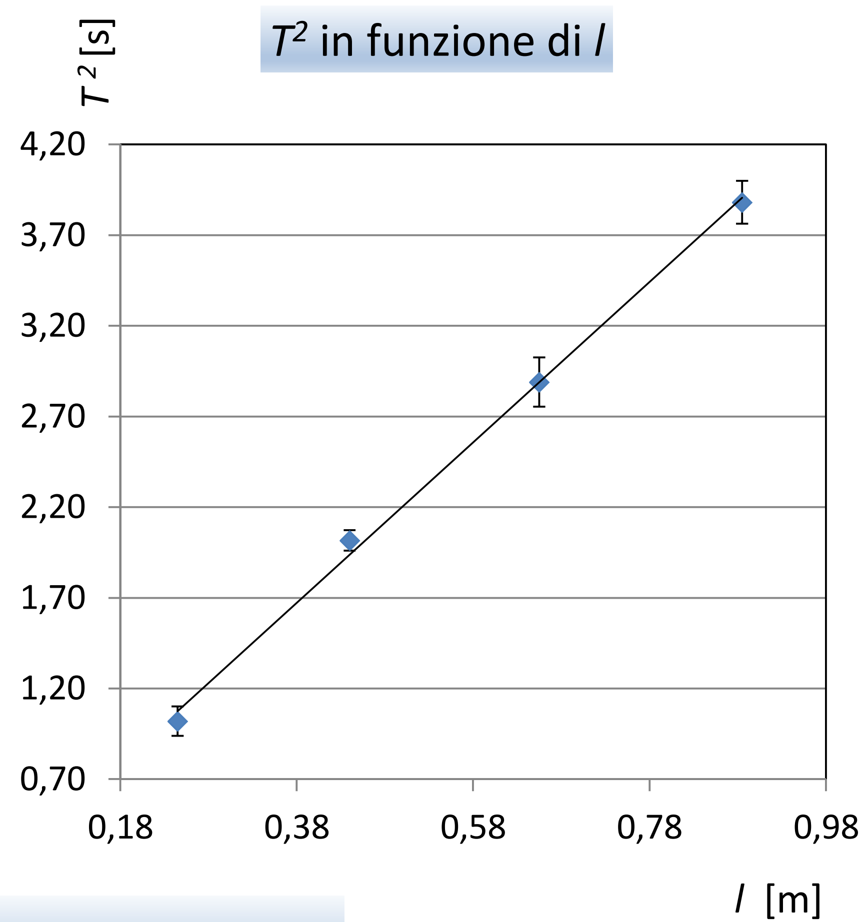


$$B \equiv \frac{4\pi^2}{g}$$

Rileviamo coppie di dati

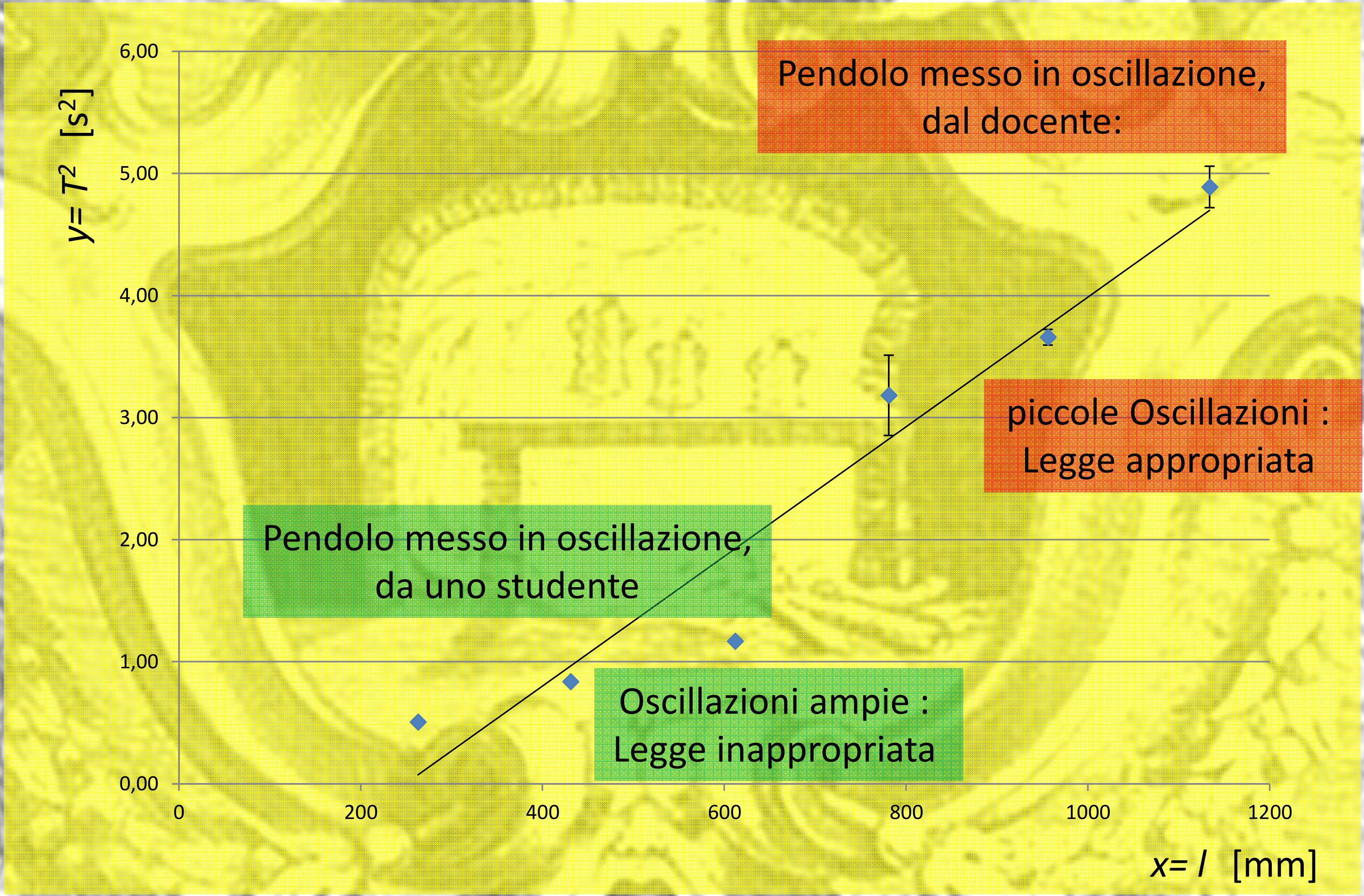
- Possiamo variare *i* volte ($x_i = l_i$) e misurare ($y_i = T_i$) una o ripetute volte per ogni l_i.





- Qual è quella giusta?

Misura di g, in classe : 10/2012



Distanza media statistica da una legge *Y*

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{d}}$$

Distanza media per le scuole?

$$s_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{N}}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}}$$

Distanza media statistica per la retta

$$s_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - A - Bx_i)^2}{N}}$$

Deviazione standard della retta teorica

Accetto la retta (la legge) se $\sigma_Y \le \delta y$ in media sui vari punti e utilizzo come incertezza δy *(la statistica mi permetterebbe di abbattere* σ_y*)*

Se $\sigma_Y > \delta y$ la legge non è adatta, ma posso fornire il risultato della mia misura utilizzando come incertezza $\sigma_Y + \delta y$.