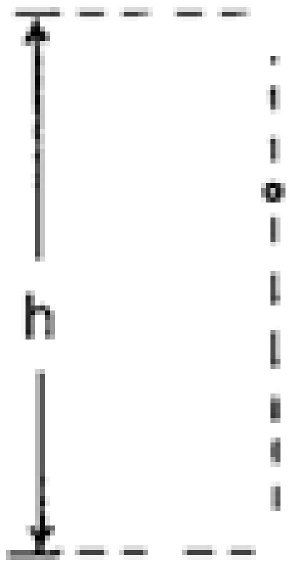
Propagazione delle incertezze

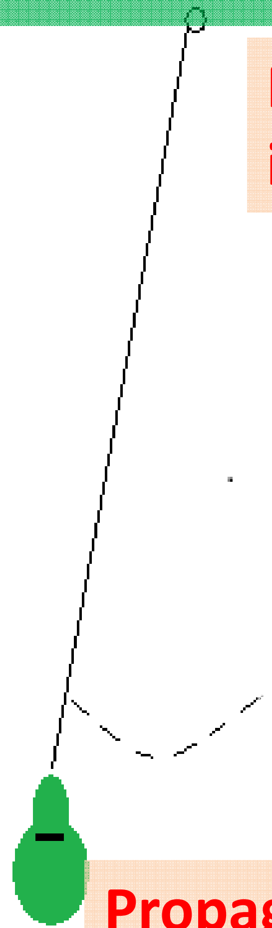


$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

Posso misurare *g*, indirettamente

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

Devo propagare le incertezza su *h* e *t*.



Posso misurare *g*, indirettamente

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Propagare le incertezze su *l* e *T*, se *t* è il tempo di *N* oscillazioni,

$$T = t / N$$

propagare l'incertezza su *t*.

Propagazione delle incertezze

$$v_s = 2(x_1 - x_2)\nu$$

Velocità del suono v_s misurata dalla distanza tra due massimi (x_1 ed x_2) di onde stazionarie e la frequenza (ν).

Caso generale: deduzione di una grandezza dipendende (v_s) da altre grandezze indipendenti (x_1, x_2, n).

La grandezze indipendenti possono a loro volta essere dedotte da relazioni, percui dipendenti a loro volta (λ lunghezza d'onda per esempio).

$$\lambda = 2(x_1 - x_2) \qquad v_s = \lambda\nu$$

Attenzione a non confondersi con misure dirette o indirette

È utile la descrizione funzionale g grandezza dipendente da x, y, …, e z :

$$g = g(x, y, \dots, z)$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$$g = x + y \qquad x = x_{ms} \pm \delta x \qquad y = y_{ms} \pm \delta y$$

Vogliamo trovare la migliore stima di g e l'incertezza δg

$$g_{ms} = x_{ms} + y_{ms}$$

Qual è il valore massimo g?

$$g_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (x_{ms} + \delta x) + (y_{ms} + \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) + (\delta x + \delta y)$$

Qual è il valore minimo g?

$$g_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = (x_{ms} - \delta x) + (y_{ms} - \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) - (\delta x + \delta y)$$

Esprimiamo la misura di g:

$$g = g_{ms} \pm \delta g$$

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$$g = x + y + z = \varsigma + z$$

Possiamo iterare per *n* variabili (grandezze)

Possiamo verificare che anche nelle sottrazioni:

$$g = x - y$$

Si ha

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

In generale in caso di somme o sottrazioni:

$$g = x + o - y + o - \cdots z$$

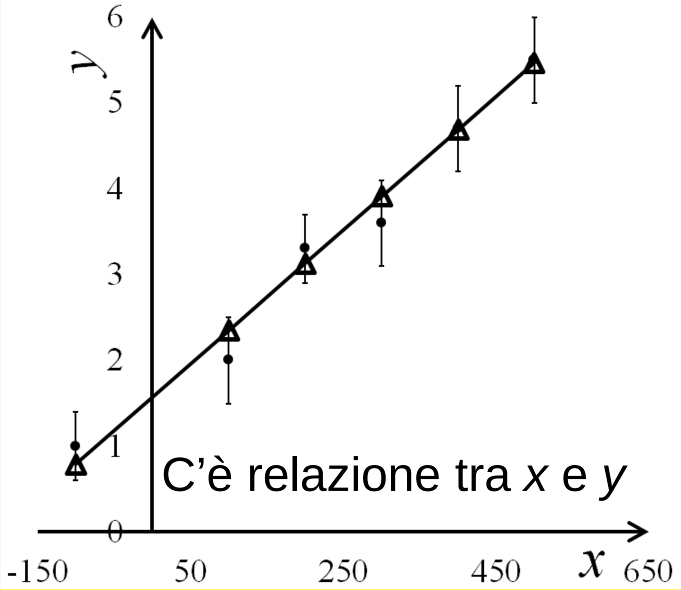
$$\delta g = \delta x + \delta y + \cdots \delta z$$

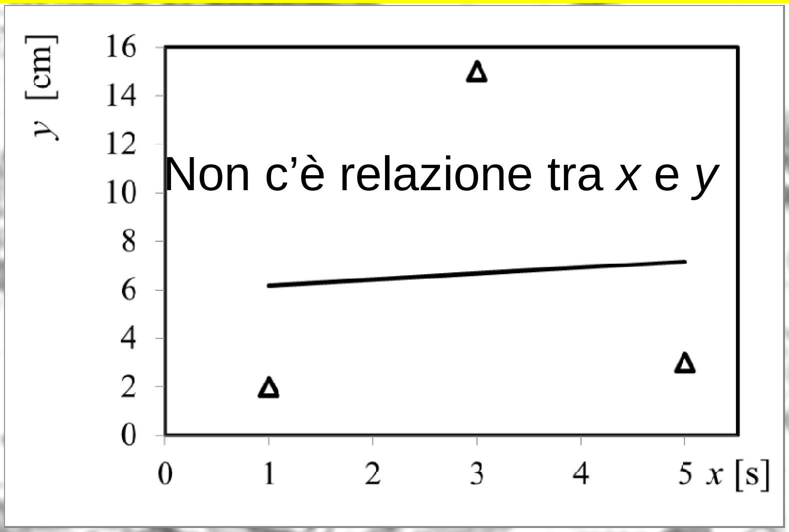
si sommano le incertezze totali (assolute)

Somme lineari ed in quadratura

$$g_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (x+\delta x) + (y+\delta y) = (x+y) + (\delta x + \delta y)$$

In questa derivazione abbiamo assunto che, quando *x* è massima, lo è anche *y*, questo si ha, quando c'è relazione tra le due grandezze.





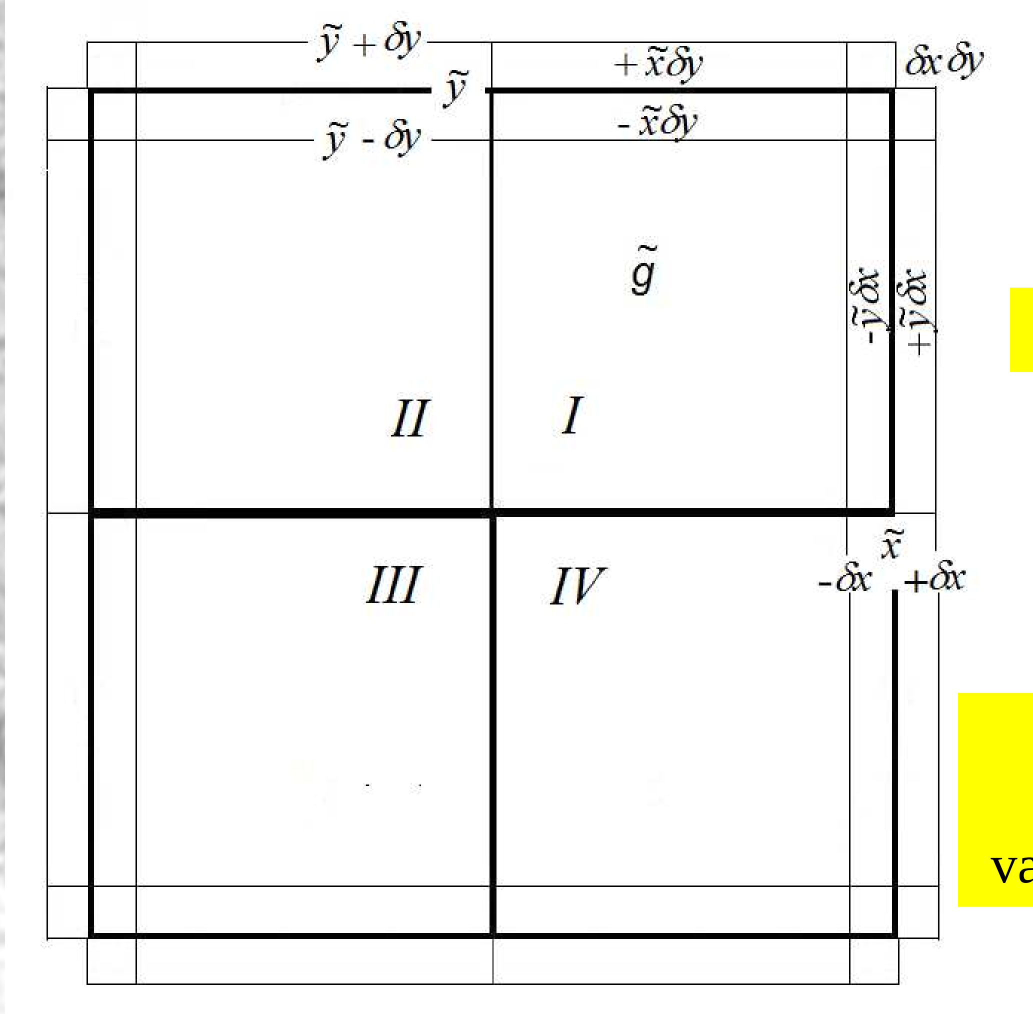
Se non c'è relazione si sommano in quadratura

$$(\delta g)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots (\delta z)^2$$

$$\delta g = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots (\delta z)^2}$$

Dimostrazione non proponibile agli studenti, ma G. Ciullo pag. 170 covarianza e correlazione.

Propagazione prodotti e frazioni



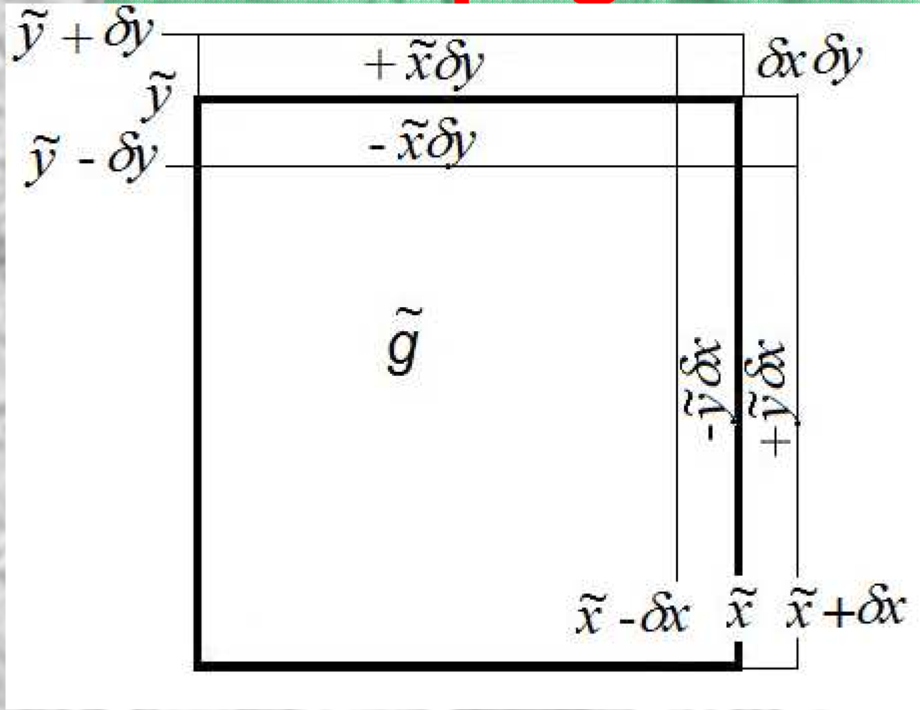
$$g = xy$$

Discuto il caso *xy*, con *x* ed *y* positive

Se prendo in valore assoluto $|x||y|$, la discussione
vale per tutti i casi come mostrato a lato.

Quindi quanto ricavato lo estendo a qualsiasi situazione, rispetto ai valori assoluti.
Le incertezze le esprimiamo in valore assoluto.

Propagazione per prodotti



$$g = xy$$

$$g_{ms} = x_{ms} y_{ms}$$

$$g_{\max} = x_{\max} y_{\max}$$

$$g_{\max} = (x_{ms} + \delta x)(y_{ms} + \delta y) = x_{ms} y_{ms} + x_{ms}\delta y + y_{ms}\delta x + \delta x\,\delta y$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms}\delta y + y_{ms}\delta x$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\delta g = g_{\max} - g_{ms} \approx x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\frac{\delta g}{x_{ms} y_{ms}} = \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$g_{ms}$$

Propagazione per prodotti

$$g_{\min} = (x_{ms} - \delta x)(y_{ms} - \delta y) = x_{ms} y_{ms} - x_{ms}\delta y - y_{ms}\delta x + \delta x \delta y$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms}\delta y - y_{ms}\delta x$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\frac{dg}{g_{ms}} = \frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta x}{|x_{ms}|}$$

Con i valori assoluti includo tutti i possibili casi.

Propagazione per prodotti … frazioni

$$g = xyz = \varsigma\, z$$

Possiamo iterare per *n* variabili (grandezze)

$$g = xy \cdots z$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

Frazioni

$$g_{\max} = \frac{x_{\max}}{y_{\min}} = \frac{x_{ms} + \delta x}{y_{ms} - \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}}\left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right) \approx 1 + \frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\max} = g_{ms} + g_{ms}\left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$g_{\min} = \frac{x_{\min}}{y_{\max}} = \frac{x_{ms} - \delta x}{y_{ms} + \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}}\left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}}\right) \approx 1 - \frac{\delta x}{x_{ms}} - \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\min} = g_{ms} - g_{ms}\left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

Se non è chiaro il simbolismo

	y_{ms}/y_{ms}	dy/y_{ms}	sottraggo	inverso	arrotondo
incertezza 1%	1	0.01	0.99	1.010101	1.01
			sommo		
	1	0.01	1.01	0.990099	0.99
Incertezza 5 %	y_{ms}/y_{ms}	dy/y_{ms}	sottraggo	inverso	arrotondo
	1	0.05	0.95	1.052632	1.05
			sommo		
	1	0.05	1.05	0.952381	0.95
Incertezza 10 %	y_{ms}/y_{ms}	dy/y_{ms}	sottraggo	inverso	arrotondo
	1	0.1	0.9	1.111111	1.1
			sommo		
	1	0.1	1.1	0.909091	0.9

Prodotti/frazioni somma lineare e quadr.

$g = g(x, y, \cdots z)$ frazioni e/o prodotti

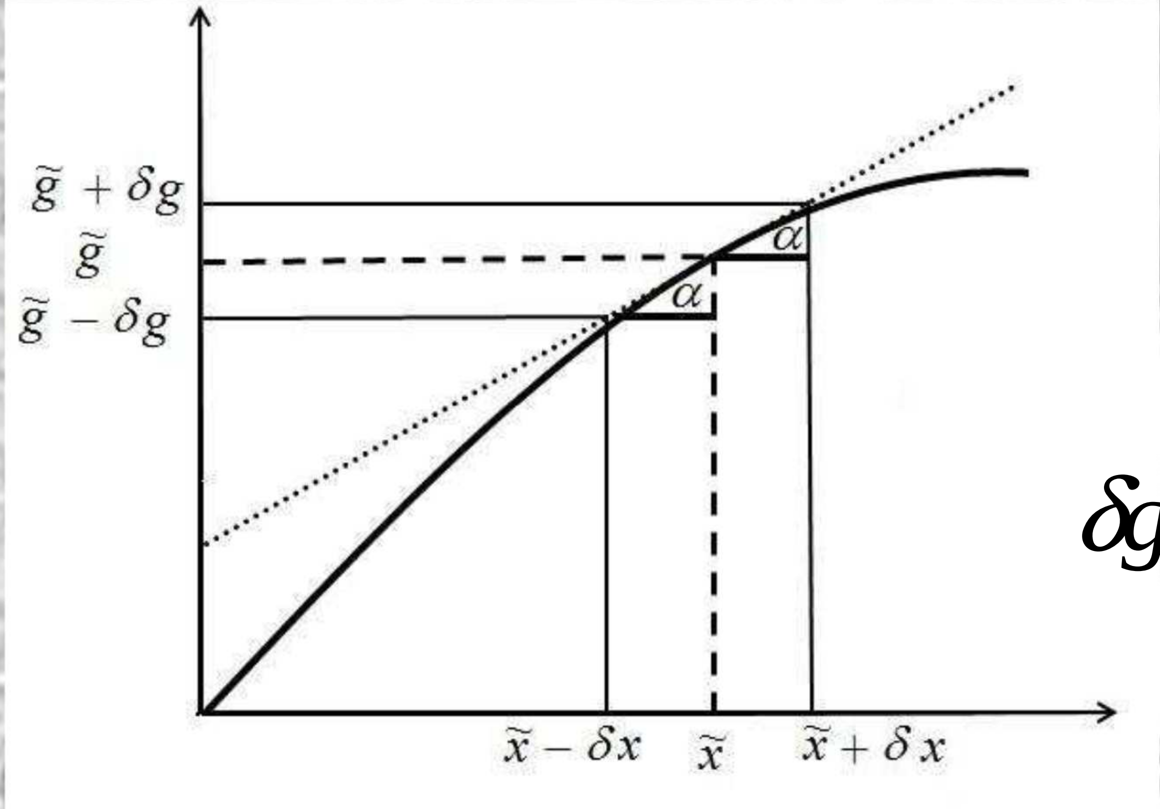
$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

x, y, z dipendenti tra loro,

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z_{ms}}\right)^2}$$

x, y, z indipendenti tra loro.

Propagazione su relazioni funzionali



$$\frac{\delta g}{\delta x} \approx \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) \right|$$

$$\delta g \approx \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) \right|_{x=\tilde{x}} \delta x$$

Una volta studiate le derivate, si può anche introdurre.

Considerazioni

Per la propagazione segnaliamo che abbiamo utilizzato il simbolo δ, per intendere l'incertezza totale, ma si intende una piccola variazione rispetto ad un valore (per noi la migliore stima = misura).

Le regole valgono per qualsiasi tipo di incertezza (ε_x, η_x, σ_x, o Δ_{x} , δx), dato che ci si aspetta siano tutte piccole quantità, rispetto a x_{ms}.

Misuriamo di *g*

- Possiamo provare a misurare l'accelerazione gravitazionale g , per esempio con misure ripetute di una pallina lasciata cadere.

Oppure

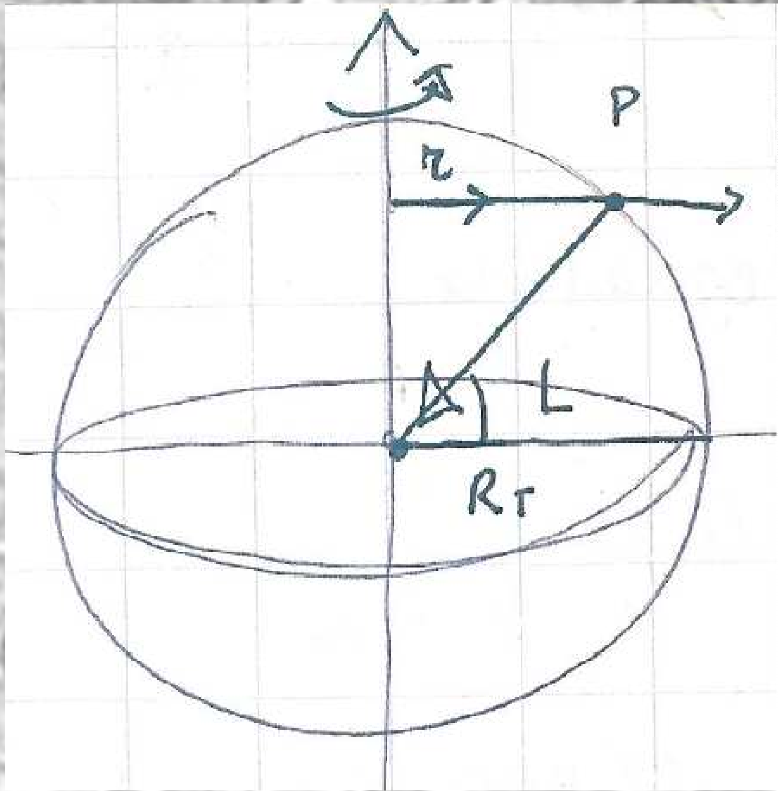
- Possiamo misurare con misure ripetute del periodo del pendolo.

Seguiamo quest'ultimo approccio, in quanto pensiamo di avere più controllo, per esempio possiamo aumentare il numero di oscillazioni e migliorare la precisione nella misura di T.

Stima a priori delle incertezze

- Stima a priori delle incertezze: serve per farsi un'idea di quale precisione si possa raggiungere. A cosa serve?
  – per iniziare a ragionare su quale incertezza domina maggiormente nella misura,
  – per iniziare, prima di andare in laboratorio, a vedere, quali formule usare per la propagazione, o dare maggiore attenzione alle grandezze più influenti.

Perché questa precisione, o cosa possiamo vedere?



- Per effetto della rotazione della terra, al variare della latitudine la forza centrifuga riduce l'accelerazione di gravità.
- All'equatore forza centrifuga massima:

$$g = 9.781 \text{ m/s}^2$$

- Ai poli forza centrifuga minima:

$$g = 9.831 \text{ m/s}^2$$

A Ferrara latitudine 44.83°:

$$g = 9.806 \text{ m/s}^2$$

Variazione totale di g: $\Delta g/g_{centrale}$ = 0.05/ 9.806 = 5.1 per mille ~ 5 ‰

A priori con un apparato, è verificabile l'effetto della forza centrifuga?

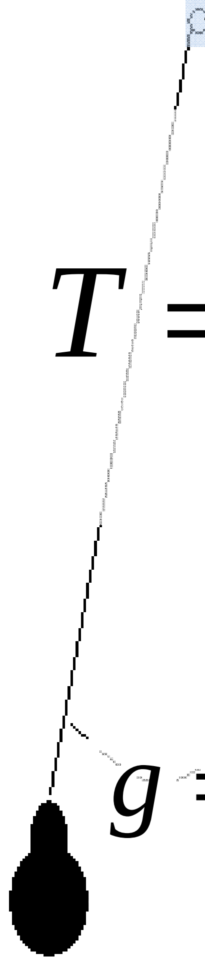
Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $T = t/N$:
  - $\delta T = \delta t/N$
    - *Non esageriamo però: tempo, attrito?*
- $g = 4\pi^2 l/T^2$
  - $$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T}$$

A priori solo incertezze di lettura (ε):

$$T = t/N$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Stima a priori: solo incertezze di lettura

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

A priori solo incertezze di lettura (ε):

$$\frac{\delta g}{|\tilde{g}|} = \frac{\delta h}{|\tilde{h}|} + 2\frac{\delta t}{|\tilde{t}|}$$

$\delta h = \varepsilon_h = 0.5$ mm

$\delta t = \varepsilon_t = 0.005$ s

$$\frac{\delta g}{|\tilde{g}|} = \frac{0.5\ \text{mm}}{1820\ \text{mm}} + 2\frac{0.005\ \text{s}}{0.62\ \text{s}} =$$

Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $\varepsilon_T = 1/3\ \varepsilon_t =$

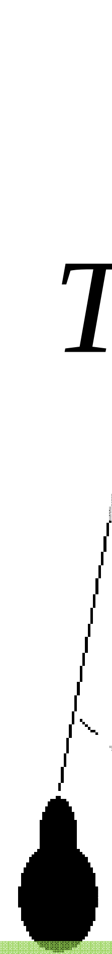
$= 1/3\ (1/2 * 1/100\ \text{s}) =$

$= 1.7\ 10^{-3}\ \text{s}$

- $\varepsilon_l = 1/2\ (1\ \text{mm}) = 0.5\ \text{mm}$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = \frac{\varepsilon_l}{l} + 2\frac{\varepsilon_T}{T} = \frac{0.5\ \text{mm}}{1200\ \text{mm}} + \frac{1.7\ 10^{-3}\ \text{s}}{2.2\ \text{s}}$$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = 0.04\ \% + 0.08\ \% = 0.12\ \%$$



$$T = t / N$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

Misuriamo e ….

Misure ripetute: 3 oscillazioni t=3 T

$$T = t / N$$

	$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7
	Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P
i_{misura}	1	6.71	6.57	6.57	6.49	6.71	6.64	6.05
	2	6,.73	6.65	6.95	6.57	6.68	6.78	6.64
	3	6.67	6.75	6.42	6.73	6.74	6.73	6.11
	4	6.73	6.61	6.63	6.67	6.70	6.63	6.36
	5	6.70	6.57	6.73	6.66	6.79	6.65	6.87
	6	6.63	6.65	6.63	6.67	6.99	6.66	6.34
	7	6.76	6.69	6.83	6.67	6.90	6.63	6.25
	8	6.78	6.71	6.53	6.72	6.71	6.72	6.32
	9	6.57	6.49	6.66	6.65	6.65	6.62	6.65
	10	6.76	6.60	6.67	6.69	6.89	6.63	6.89

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

t_{medio}= 6.65 s

σ_t= 0.17 s

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Incertezza casuale $\sigma_t / t = \sigma_T / T = 0.03$

Incertezza totale $(\delta t)^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 =(0.17\ \mathrm{s})^2$

Incertezza su *l*

l [cm]	121.0	121.2	120.9	121.7	121.2	120.8	121.3
$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7
Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P

l_{max} = 121.7 cm, l_{min} = 120.8 cm

Pochi dati per usare dev. St. e media:

$$l_{ms} = valore\ centrale = l_{val.\ centr.} = \frac{l_{max}+l_{min}}{2}$$

$$\frac{\Delta_l}{2} = semidispersione = \frac{l_{max}-l_{min}}{2}$$

Il massimo ed il minimo hanno anche un’incertezza di lettura, non contemplata nell’intervallo, si possono sommare in modo lineare o anche in quadratura:

$$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta_l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2$$

Per la dispersione si usa appositamente il simbolo Δ_l = ($l_{max} - l_{min}$), con l al pedice per distinguerlo dal semplice scarto $\Delta\, l$ qualsiasi =($l_2 - l_1$).

Incertezza su *l*

$l_{val.\,centr.} = 121.25\ \text{cm}, \frac{\Delta_l}{2} = 0.45\ \text{cm}$

ε_l= 0.05 cm

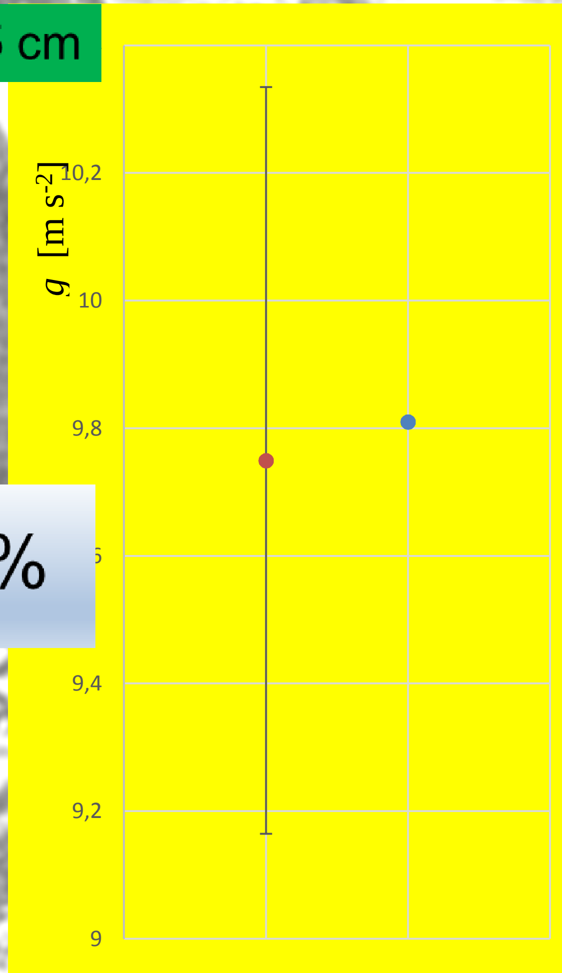
$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta_l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2 = 0.45\ cm \approx 0.5\ \text{cm}$

$\frac{\delta l}{l} = 0.4\ \%$

A posteriori $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T}$ = 0.06 = 6 %

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

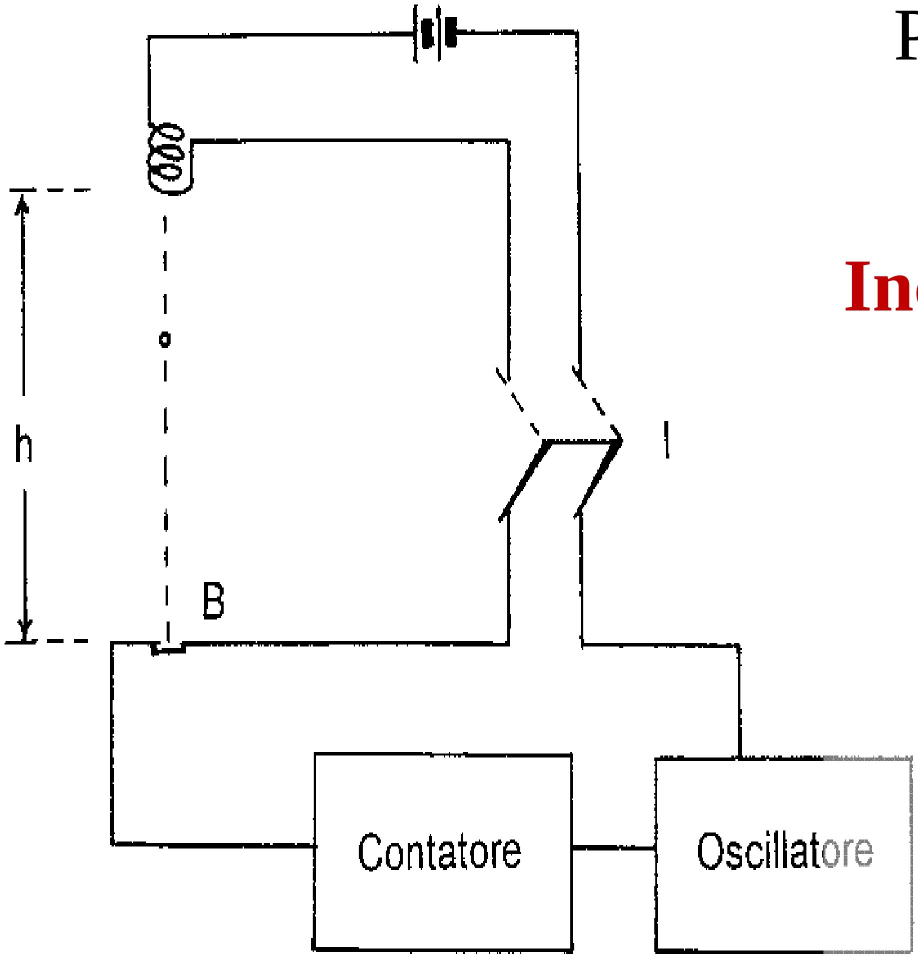
g	9.749524
δg=	0.584971



Otteniamo la misura di g = 9.8 $\pm$ 0.6 m s^{-2}

Estraimo quindi le misure di *g*

maggiore precisione = maggiore complicazione



Precisione su intervalli di tempo con un oscillatore (impulsi/s), un contatore (ris. 1 impulso).

Incertezza a priori:

per $t = 0.45$ s,

100 000 impulsi al secondo, precisione: 0.5/45 000

$\varepsilon_t/t \sim 1/100\,000$.

Incertezza a priori su $h = 1$ m, stecca metrica (ris. 1 mm)

$\varepsilon_h/h \sim 0.5$ mm/ 1 000 mm.

Incertezza a priori su misura di *g*

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \equiv g = \frac{2h}{t^2}$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t}{t}$$

$$\frac{\delta g}{g} = 0.0005 + 0.00002$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{0.5 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm}} + 2\frac{0.5}{45\,000}$$

0.52 per mille

≈ 5 su 10 000

Ma anche presso le scuole

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \equiv g = \frac{2h}{t^2}$$

h misurato come differenza tra due punti, con scala graduata di risoluzione 1 mm

t misurato sul display come 0.000 s, risoluzione 0.001 s.

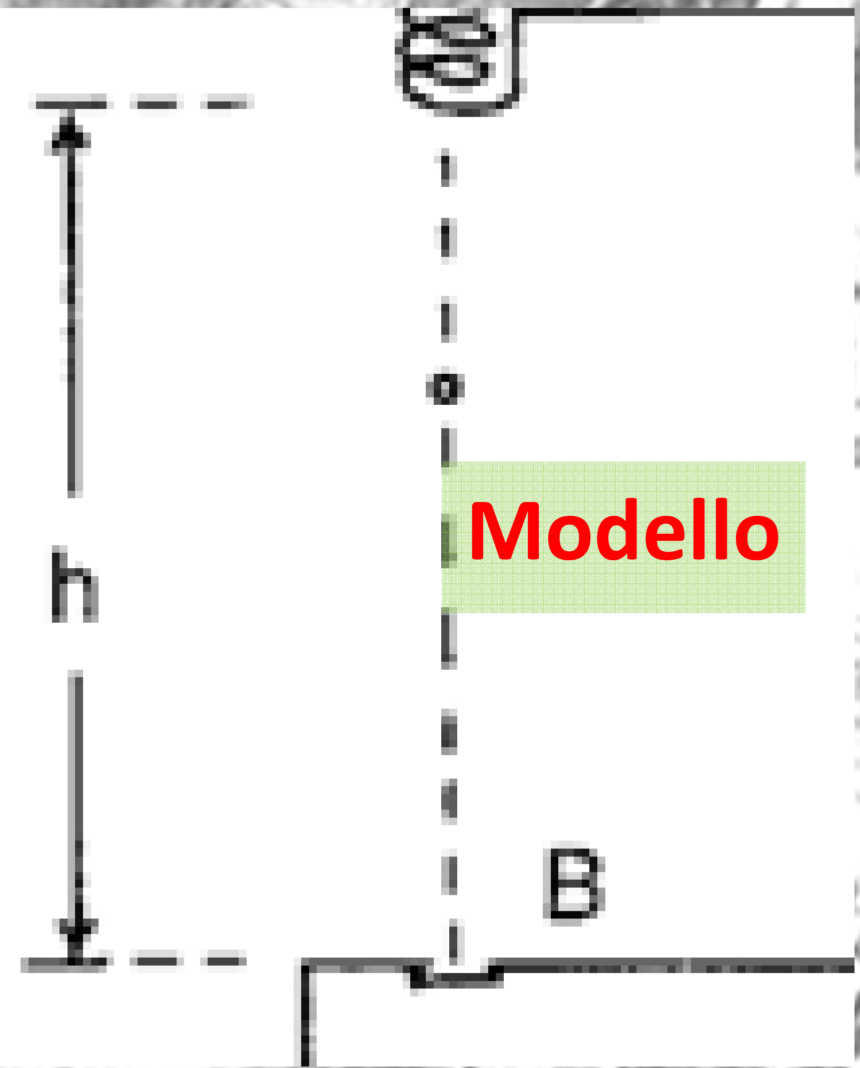
$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t}{t}$$

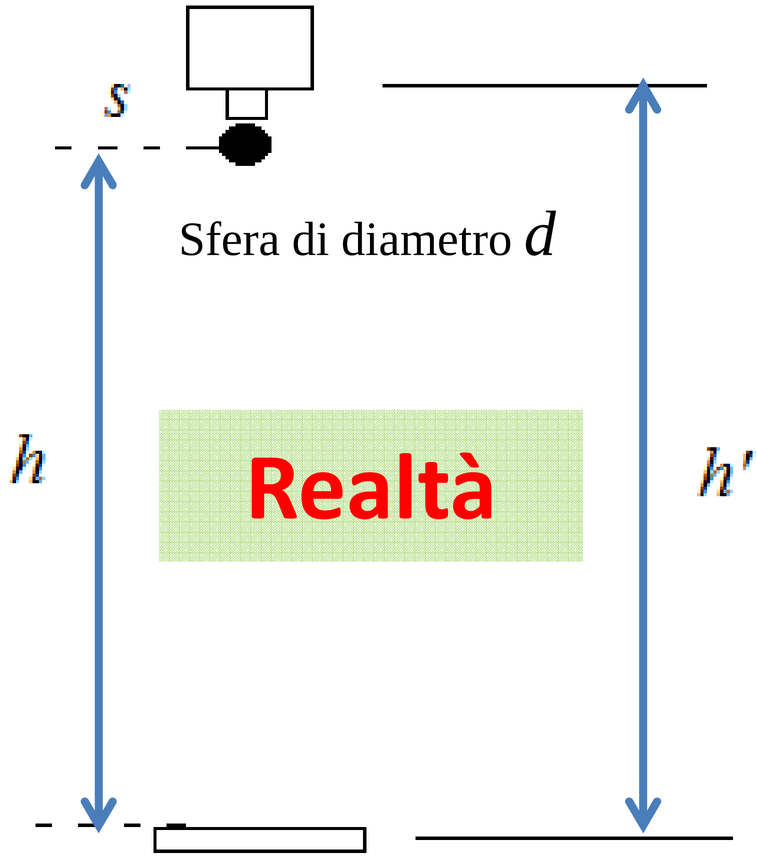
$$\frac{\delta g}{g} = 0.001 + 0.002$$

$$\frac{\delta g}{g} = \boxed{\frac{1 \text{ mm}}{1\,000 \text{ mm}}} + \boxed{2\frac{0.0005 \text{ s}}{0.450 \text{ s}}}$$

$$\approx 3 \text{ su } 1\,000$$

Per misurare g oltre a t serve h





Incertezza su *h*

- Ovviamente misure sull'apparato
  - Si osserva che l'interruttore si attiva, quando metà sferetta è dentro.

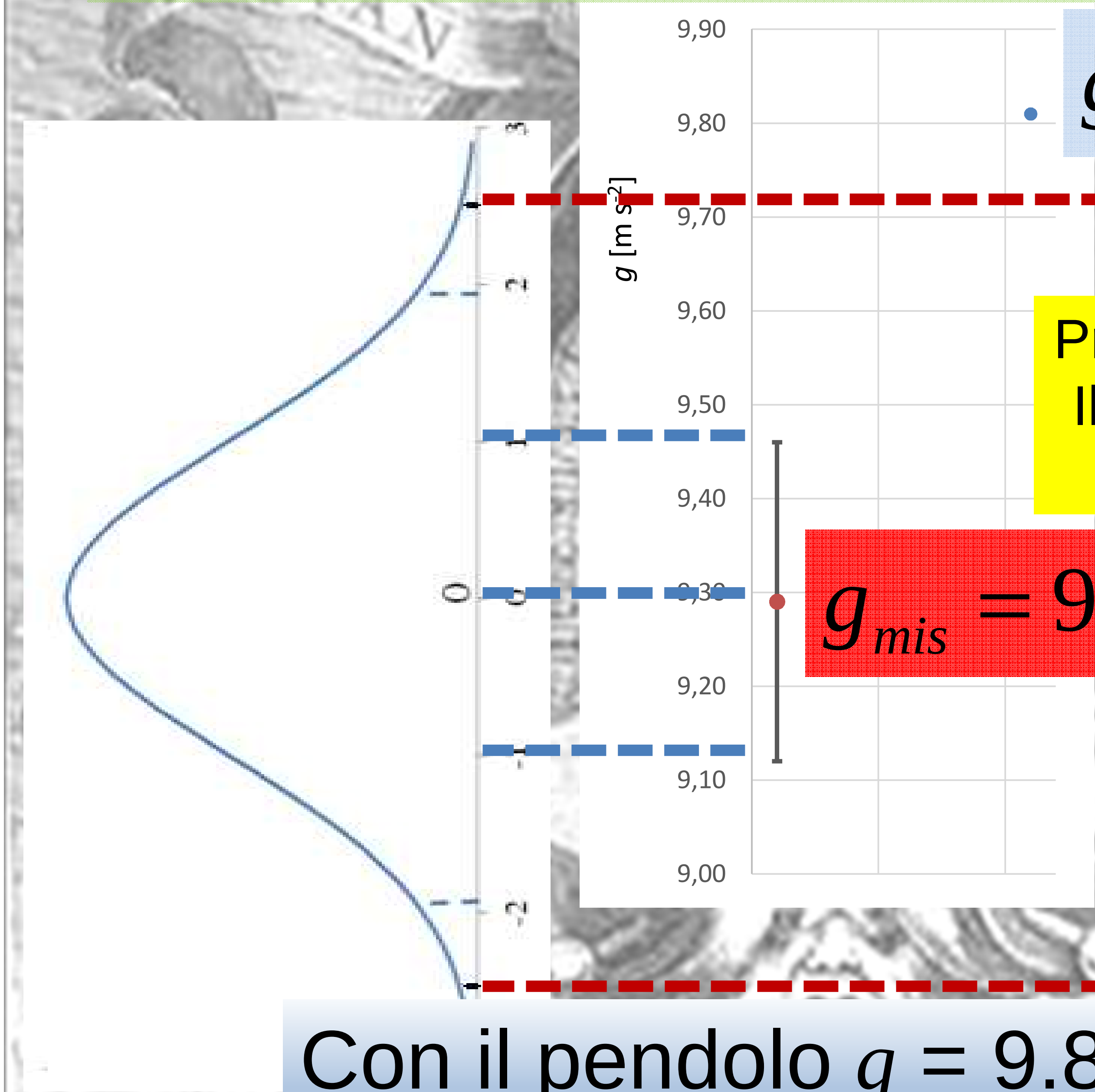
$$h = h' - s - \frac{d}{2}$$

$$\delta h = \varepsilon_{h'} + \varepsilon_s + \frac{1}{2}\varepsilon_d$$

  - Solo incertezze di lettura: *h* misurata con regolo, *s* e *d* misurati con calibro.

Accettiamo il valore atteso?

$$g_{att} = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

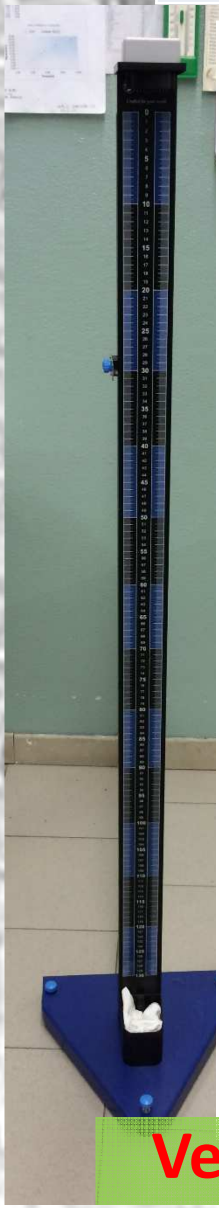


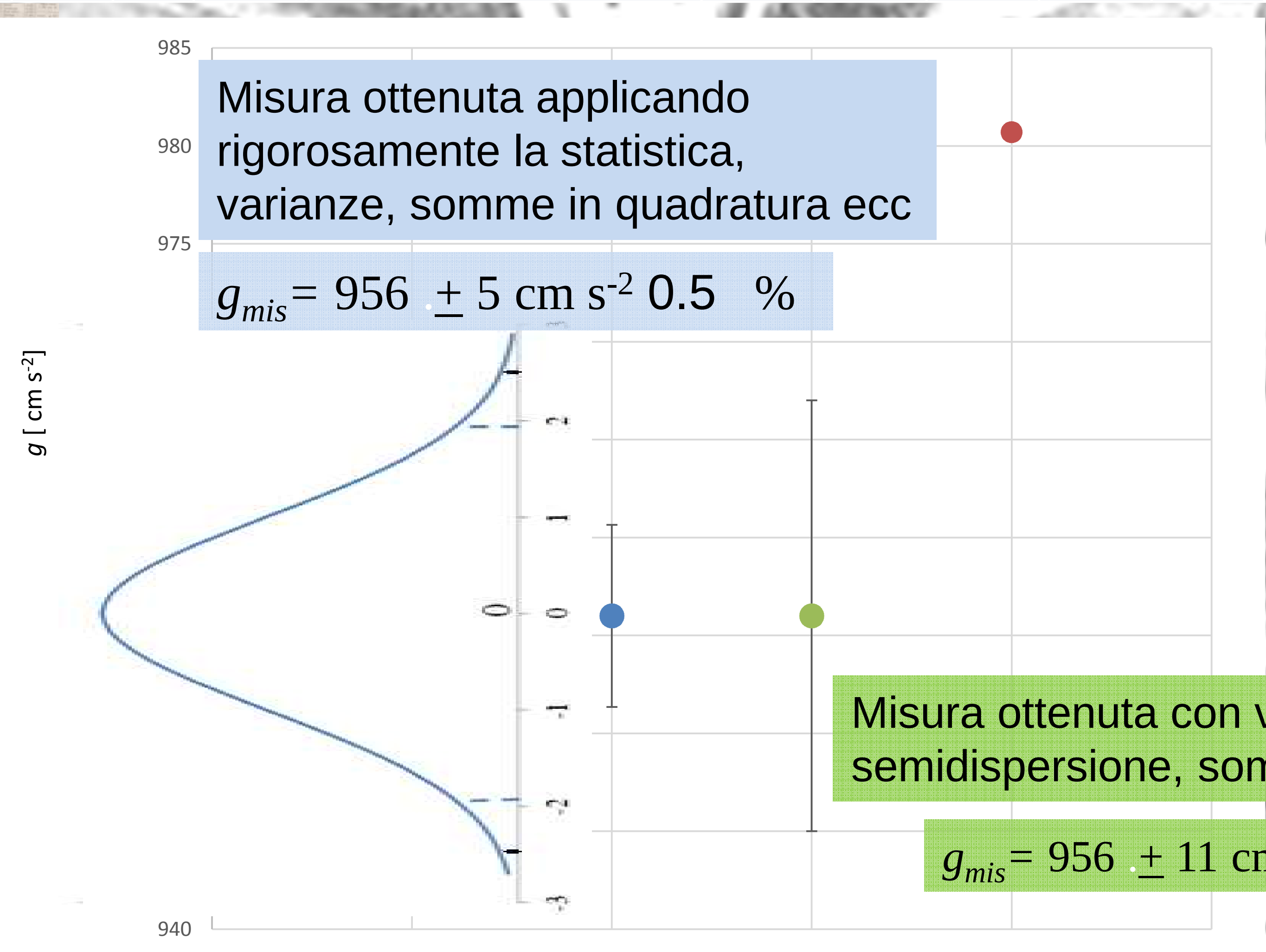
Probabilità di ottenere Il valore fuori minore del 1 %

$$g_{mis} = 9.29 \pm 0.17\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Con il pendolo $g = 9.8 \pm 0.6\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

h	δh											
[cm]	[cm]		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50.0	0.1	t [s]	0.324	0.323	0.324	0.324	0.324	0.323	0.324	0.323	0.323	0.323





Misura ottenuta applicando rigorosamente la statistica, varianze, somme in quadratura ecc

$g_{mis} = 956 \pm 5$ cm s^{-2} 0.5 %

Misura ottenuta con val. centr. e semidispersione, somme lineari.

$g_{mis} = 956 \pm 11$ cm s^{-2} 1.2 %

Verifica altamente significativa … modello da rigettare …

Devo ricontrollare le ipotesi e trovare un altro modello