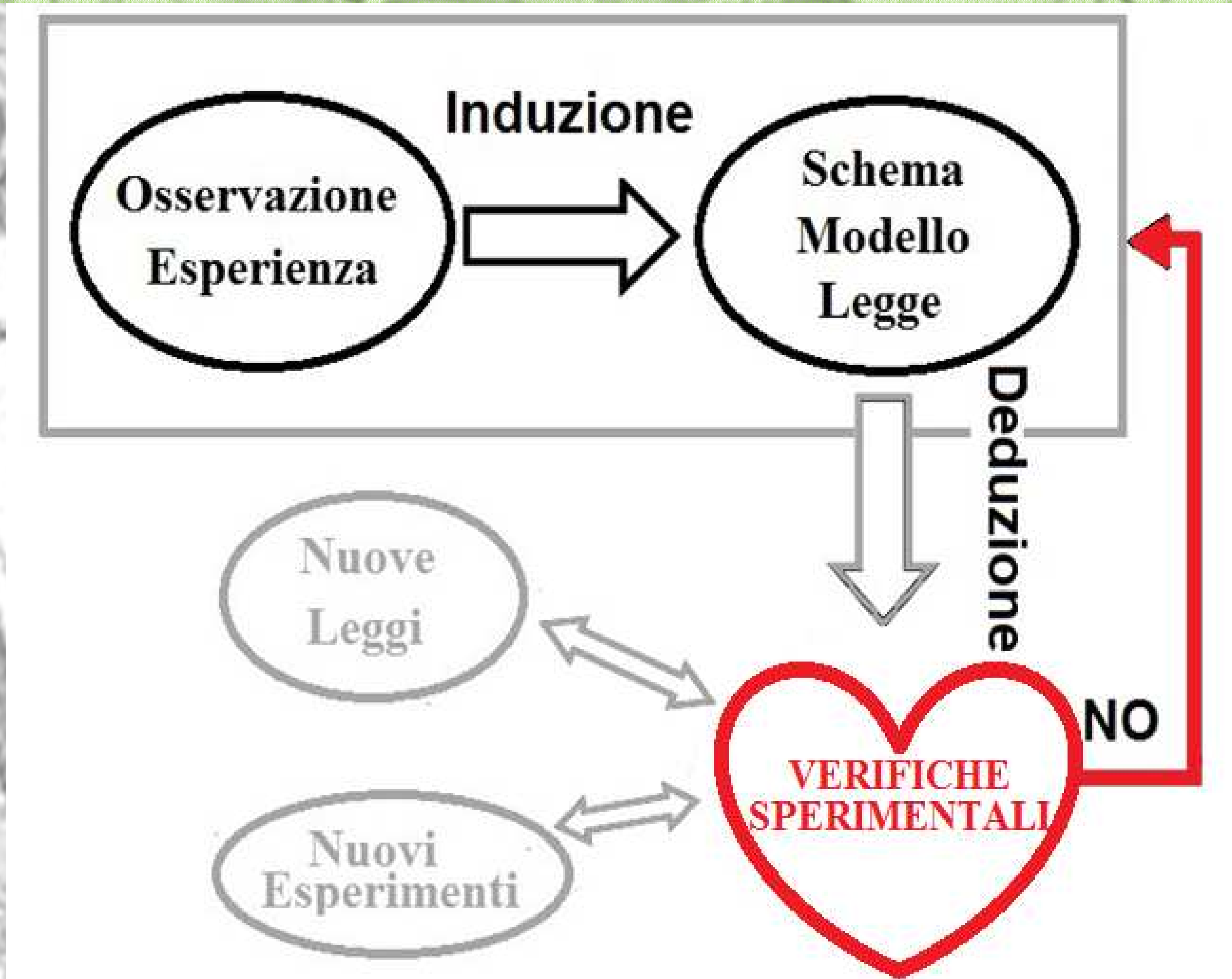
La fisica come scienza della misura

- Riprendiamo … l’approccio al laboratorio con la verifica di una legge:
  - Rigore: non posso evitarvelo.
  - Semplificazioni e conseguenze (sbrodolamento).
- Esempi:
  - *g* con sistema elettronico: maggiore precisione – accuratezza ?.
  - Calorimetro: un modello semplice, una complicazione sperimentale insormontabile?
  - Misure di *h* con LED: variazioni sul tema, matematica, PC e fogli di calcolo.

PROVANDO E RIPROVANDO



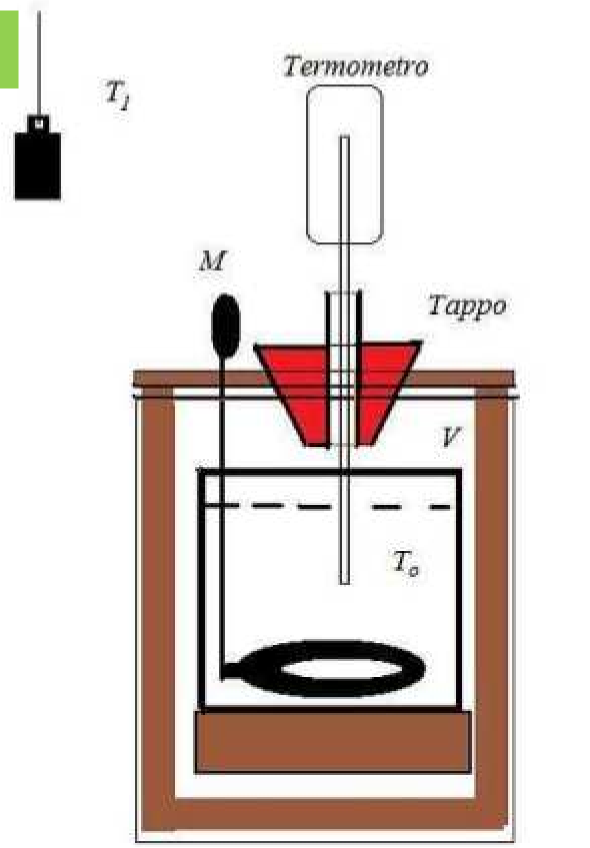
Provando, argomentando, e dis-provando, cioé controargomentando
Le “sensate esperienze” iterate e reiterate di Galileo.

Riprendiamo l'argomento: verifica di una legge fisica.

Prima di arrivare agli esempi-esperimenti «plateali»

Punto Materiale – caduta del grave.

Calorimetro.

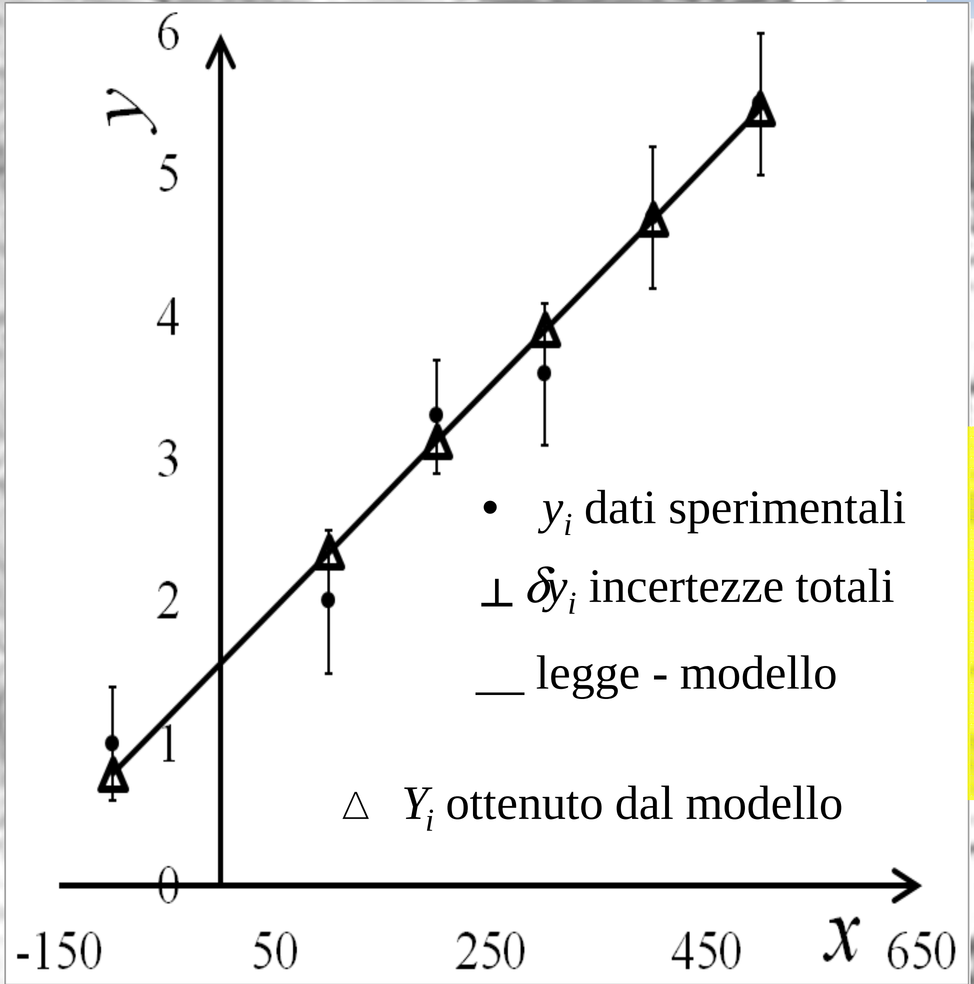


Esperienze con apparecchiatura, osservata a colpo d'occhio da me, presso il Roiti, adattamento ai sistemi da me riorganizzati all'uopo.

Vorrei ricordarvi… l'approccio rigoroso, poi … trovare insieme le scappatoie.

Scappatoie

Quindi $|Y_i - y_i| \leq \delta y_i$



$$\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2 \leq 1$$

$$\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2 \leq N$$

$$\min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2\right\}$$

Metodo dei minimi quadrati, minimizzazione della quantità espressa in parentesi graffe.

Ciullo G. Introduzione al laboratorio di Fisica

e …rigore.

Pg 142

Se y_i segue la distribuzione gaussiana suddetta, la probabilità di ottenere il valore y_i sarà proporzionale a:

$$P_{Y_i,\sigma_i}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_i} e^{-(y_i-Y_i)^2/2\sigma_i^2} ,$$

dove il valore centrale della gaussiana sarà espresso da una relazione funzionale, nel caso particolare della regressione lineare $Y_i = A + Bx_i$.

Dai dati y_i e x_i si devono determinare dei parametri per descrive la legge, per il caso della regressioni lineare i due parametri A e B .

Esplicitiamo questo al pedice di P, che quindi risulta funzione dei parametri A e B:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_i} e^{-(y_i-A-Bx_i)^2/2\sigma_i^2} . \qquad (9.2)$$

Le y_i sono stocasticamente indipendenti, percui la probabilità di ottenere tutte le misure y_i sarà data dal prodotto delle singole probabilità espresse dalla (9.2):

$$P_{A,B}(y_1, \ldots, y_N) = P_{A,B}(y_1) \cdots P_{A,B}(y_N) \propto$$

$$\propto \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i} \right) e^{-\chi^2/2} ,$$

$$\min\left\{ \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i} \right)^2 \right\}$$

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum (\chi_i)^2$$

$$\sigma_i^2 = \text{varianza} \equiv (\delta y_i)^2$$

Metodo dei minimi quadrati

$$\min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

e ...rigore.

$$\text{se } \forall\, i\ \sigma_i \equiv \sigma_y : \min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$\min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

$\Rightarrow$ MMQ pesati

Dalla minimizzazione del χ^2 si ottengono le migliori stime dei parametro *A* e *B*, avendo assunto che i dati seguano una relazione lineare del tipo *Y=A+Bx.*

e ...rigore.

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\boxed{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}.$$

Δ

Considero *A* e *B*, funzioni delle y_i *(x_i non affette da errore o propagato su y) dalla propagazione delle incertezze*

$$A = \frac{\partial A}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial A}{\partial y_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial y_N} y_N,$$

$$\sigma_A^2 \approx \left(\frac{\partial A}{\partial y_1}\right)^2 (\sigma_1)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y_2}\right)^2 (\sigma_2)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial A}{\partial y_N}\right)^2 (\sigma_N)^2.$$

Per il teorema del limite centrale *A è gaussiana con varianza* σ_A

Programmi di analisi dati (origin, root ecc) forniscono tali valori: semplice propagazione.

Si ottiene quindi dalla varianza σ_A^2 del parametro A, la corrispondente deviazione standard:

$$\sigma_A = \sigma\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \overbrace{\Longrightarrow}^{\sigma\equiv\delta y} \left\{ \delta A = \delta y\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \right. . \tag{9.12}$$

Allo stesso modo si ottiene per l'incertezza sul parametro B:

$$\sigma_B = \sigma\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \overbrace{\Longrightarrow}^{\sigma\equiv\delta y} \left\{ \delta B = \delta y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \right. . \tag{9.13}$$

Si osservi che le *incertezze* A e B *dipendono dalle incertezze totali sulle* y etichettate σ per agganciarci al teorema del limite centrale, per il quale A e B sono variabili gaussiane con i valori aspettati dati dalle (9.7) e (9.8) e incertezze rispettivamente date dalle (9.12) e (9.13).

Le incertezze totali nelle equazioni e nella loro deduzione (9.12) ed (9.13) sono etichettate tali per generalità ed uniformità con le variabili gaussiane. Onde evitare confusione abbiamo indicato con la frecce come diventano in fase di applicazione, quindi espresse con simbolo δ.

e ...rigore.

e ...rigore.

Si ottiene quindi dalla varianza σ_A^2 del parametro A, la corrispondente deviazione standard:

$$\sigma_A = \sigma\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \;\overbrace{\Longrightarrow}^{\sigma\equiv\delta y}\; \left\{\delta A = \delta y\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}\right. . \tag{9.12}$$

Allo stesso modo si ottiene per l'incertezza sul parametro B:

$$\sigma_B = \sigma\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \;\overbrace{\Longrightarrow}^{\sigma\equiv\delta y}\; \left\{\delta B = \delta y\sqrt{\frac{N}{\Delta}}\right. . \tag{9.13}$$

Si osservi che le *incertezze* A e B *dipendono dalle incertezze totali sulle* y etichettate σ per agganciarci al teorema del limite centrale, per il quale A e B sono variabili gaussiane con i valori aspettati dati dalle (9.7) e (9.8) e incertezze rispettivamente date dalle (9.12) e (9.13).

Le incertezze totali nelle equazioni e nella loro deduzione (9.12) ed (9.13) sono etichettate tali per generalità ed uniformità con le variabili gaussiane. Onde evitare confusione abbiamo indicato con la frecce come diventano in fase di applicazione, quindi espresse con simbolo δ.

Scappatoie

σ_Y cos'è invece?

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{d}}$$

Distanza media (N numero di punti – coppie di dati)
statistica (d – gradi di libertà = numero di dati – vincoli statistici)

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_i^N (y_i - Y_i)^2}{d}}$$

vincoli statistici- parametri utilizzati per la stima che si ottengono utilizzando i dati,
osservare la formula per il numero di dati

σ_Y cos'è invece?

e ...rigore.

Si supponga che tutte le misure y_i siano gaussiane tendenti al valore vero Y_i, espresso da una relazione qualsiasi $Y = Y(x)$ rispetto alle x_i, e aventi tutte la stessa dispersione σ_Y ideale (si noti la Y maiuscola al pedice), pertanto possiamo esprimere la probabilità di ottenere una determinata y_i, che segua questa distribuzione ideale, con centralità $Y_i = Y(x_i)$:

$$P_{A,B}(y_i) \propto \frac{1}{\sigma_Y} e^{-(y_i - Y_i)^2/(2\sigma_Y^2)} \,, \tag{9.14}$$

si osservi che si presuppone a priori, che tutte le variabili y_i seguano una gaussiana

Probalità per N y_i che seguono una gaussiana di parametri Y, σ_Y

$$P_{A,B}(y_1, \ldots, y_N) \propto \frac{1}{\sigma_Y^N} e^{-\Sigma(y_i - Y_i)^2/(2\sigma_Y^2)} \,.$$

Probabilità per n x_i seguono $G_{X,\sigma}(x)$

$$P(X) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \sim \frac{1}{\sigma^n} e^{-\Sigma_{i=1}^n (x_i - X)^2/(2\sigma^2)} \,.$$

e ...rigore.

Se applichiamo il principio di massima verosimiglianza a questa ipotesi, rispetto alla migliore stima di σ_Y, (stesso calcolo fatto per la miglior stima del parametro σ_x nel caso della gaussiana con valore centrale X nella (8.10)) si ottiene:

$$\sigma_Y \text{ (ideale) } = \sqrt{\sum (y_i - Y_i)^2 / N} \tag{9.16}$$

La formula riportata nella (9.16), non è altro che la distanza media dei punti sperimentali y_i dai punti (Y_i) della retta Y assunta adatta ai dati. Ma nel quadro della statistica uno stimatore dedotto come valore medio, va diviso per i gradi di libertà pertanto, la (9.16) deve essere invece riscritta come:

$$\sigma_Y \text{ (migliore stima)} = \sqrt{\sum (y_i - Y_i)^2 / d}\ . \tag{9.17}$$

dove d sono i gradi di libertà statistici. Quanto espresso nella (9.17) vale per per qualsiasi legge–relazione $Y = Y(x)$, vediamo il caso particolare per la regressione lineare.

Le stime dei parametri A e B risultano essere due vincoli statistici, percui σ_Y sarà data dalla somma degli scarti quadratici diviso i gradi di libertà $d = N - c$, ovvero $N - 2$, fornendo per σ_Y di una retta:

$$\sigma_Y \overbrace{=}^{Y = A + Bx} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2 / (N-2)}\ . \tag{9.18}$$

PAUSA di meditazione: incertezze statistiche ideali

- Gauss: misure ripetute
- X (valore centrale) stimato da x_{media}
- σ (punti di flesso) stimati da σ_x
- se gaussiana per il teorema del limite centrale

$\sigma_{\bar{x}}$

- Regressione: relazioni funzionali
- Y (valore centrale) stimato da A e B se retta
- Se tutte le y_i gaussiane

σ_Y

Conseguenze per gaussiane

- Migliore stima di x, assunta la variabile gaussiana, dalla media aritmetica.
- Incertezza statistica, comunque per più di trenta dati, assunta la gaussiana, σ_x, *da usare anche per 10 dati*.
- Incertezza totale δ somma in quadratura (lineare per le scuole) di ε_x e σ_x ed eventuale accuratezza + o – η_x *(vedi calibrazioni)*.

- Nocciolo duro per le scuole: se x gaussiana, incertezza statistica, $\sigma_{\bar{x}}$ teorema del limite centrale.

Conseguenze per regressioni

- Migliore stima dei parametri, con formule o «scappatoie».
- Incertezze totali δA *e* δB, sia da formule (propagazione delle incertezze) che da valori centrali e semidispersione(? Vedremo).
- Soluzione per incertezze di accuratezza *(calibrazioni) con leggi fisiche (esempi: caduta del grave e calorimetro).*

- Nocciolo duro per le scuole: se la retta è adatta ai dati , incertezza statistica σ_Y, ~~ristima di nuovo~~.

Come possiamo verificare le ipotesi

- Partiamo dalla regressione: abbiamo ottenuto le stime dei parametri minimizzando la quantità:

$$\min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i}\right)^2\right\}$$

che chiamiamo χ^2 chi-quadro

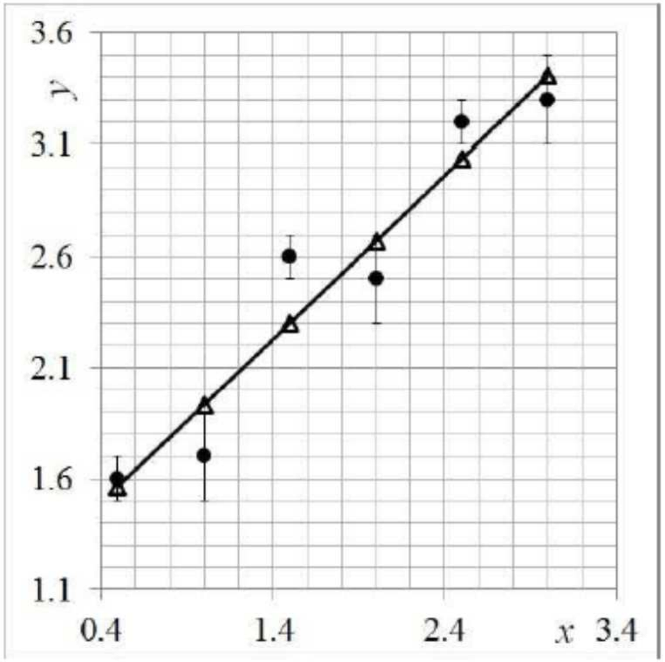
$$\chi^2 = \sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum(\chi_i)^2$$

o meglio

$$\chi^2 = \sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2 = \sum(\chi_i)^2$$

La verifica del χ^2

La *verifica del χ^2 è un controllo*, a posteriori, proprio *sulla minimizzazione* del χ^2 nella (11.1) e fornisce una valutazione quantitativa dell'accettabilità dell'ipotesi, che la relazione funzionale $y = f(x)$, trovata dall'analisi dei dati, o assunta tale a priori, sia il modello teorico adatto ai dati sperimentali.

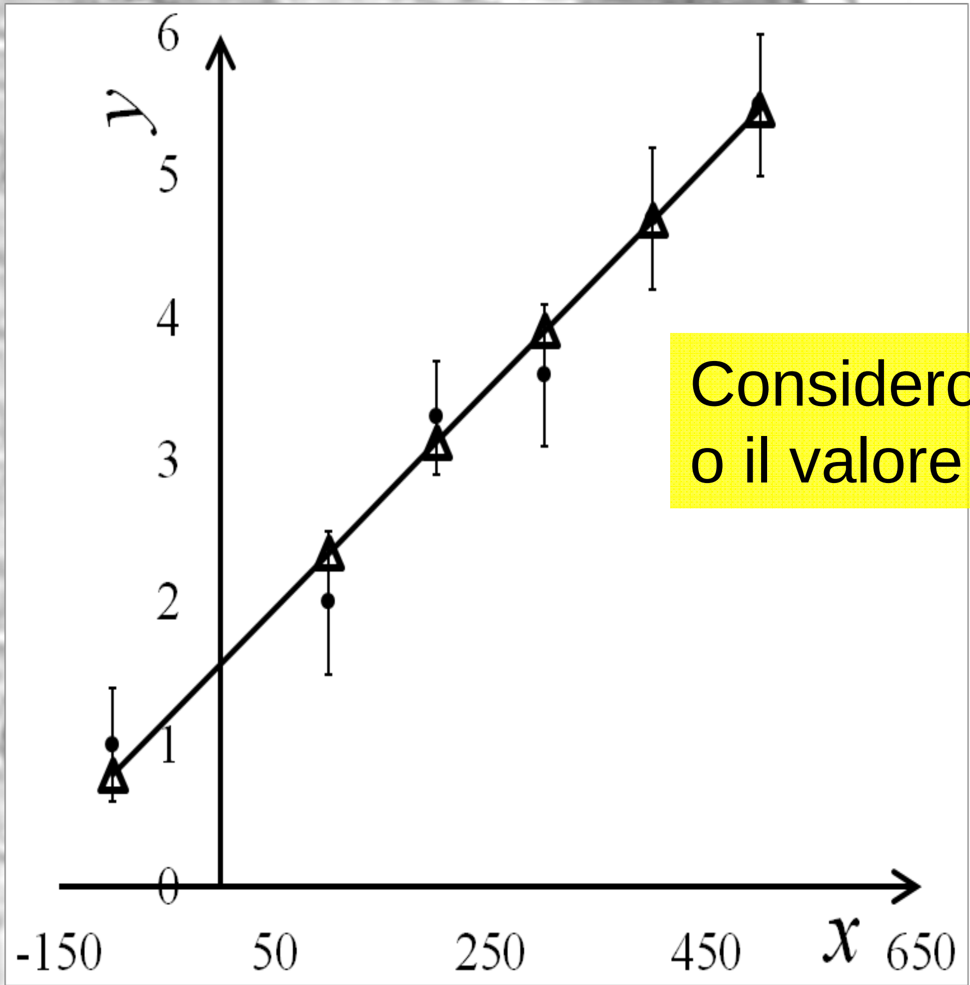


$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i} \right)^2 \leq \sum_{1=1}^{N} 1 = N.$$

Scappatoia

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{d}}$$

$$s_Y \approx \sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{N}}$$



$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i} \right)^2 = \sum (\chi_i)^2 \leq N$$

Considero $\delta y_{,}$ se δy_{i} uguali per tutte le *i*,
o il valore medio dei δy_{i} se cambiano.

$$\chi^2 = \frac{1}{(\delta y)^2} \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{1} \right)^2 \leq N$$

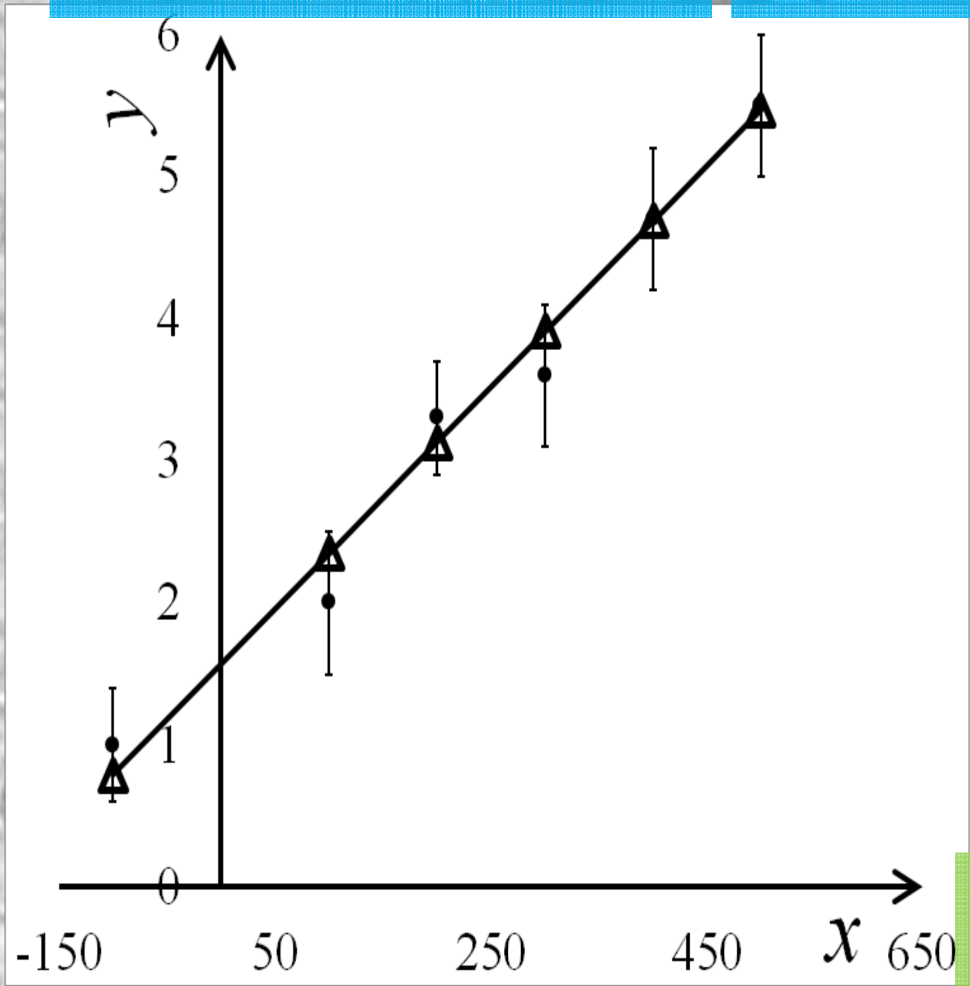
$$s_Y^2 N = \sum (y_i - Y_i)^2$$

Uso s_Y *per evitare*

***considerazioni* statistiche**

$$\chi^2 = \frac{1}{(\delta y)^2} \left(s_Y^2 N \right) \leq N \equiv s_Y^2 \leq (\delta y)^2$$

Scappatoia per la verifica del χ^2



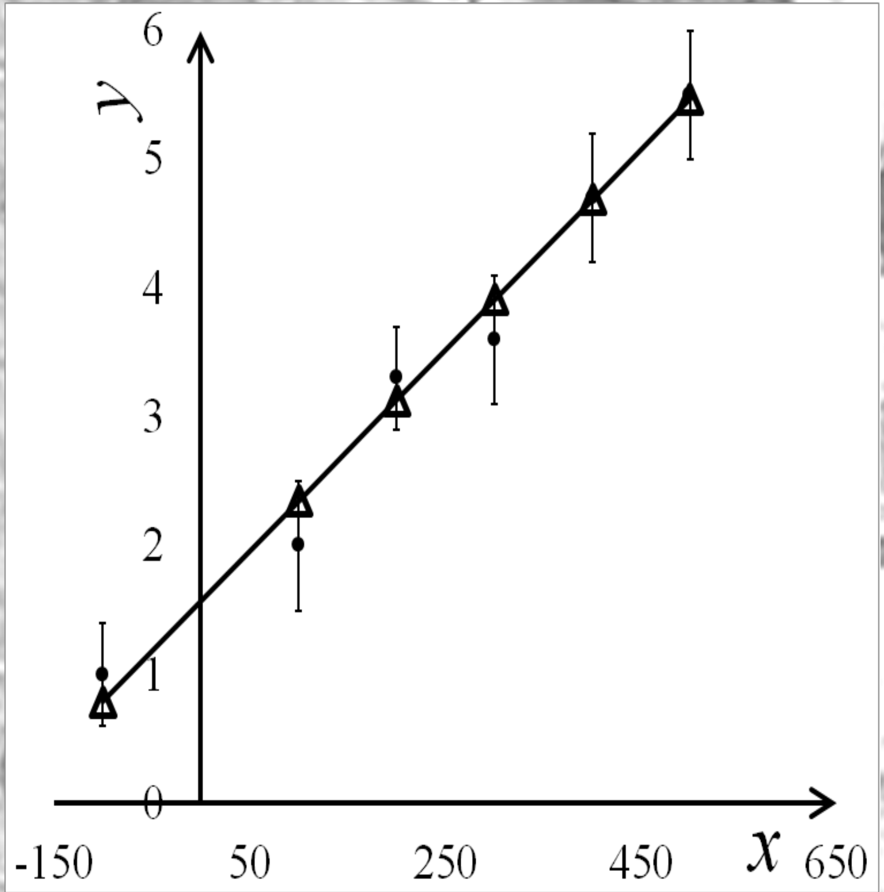
Se $\sigma_Y \leq \delta y$

La legge è appropriata per i dati:

una buona stima dell'incertezza statistica è σ_Y

Scappatoie

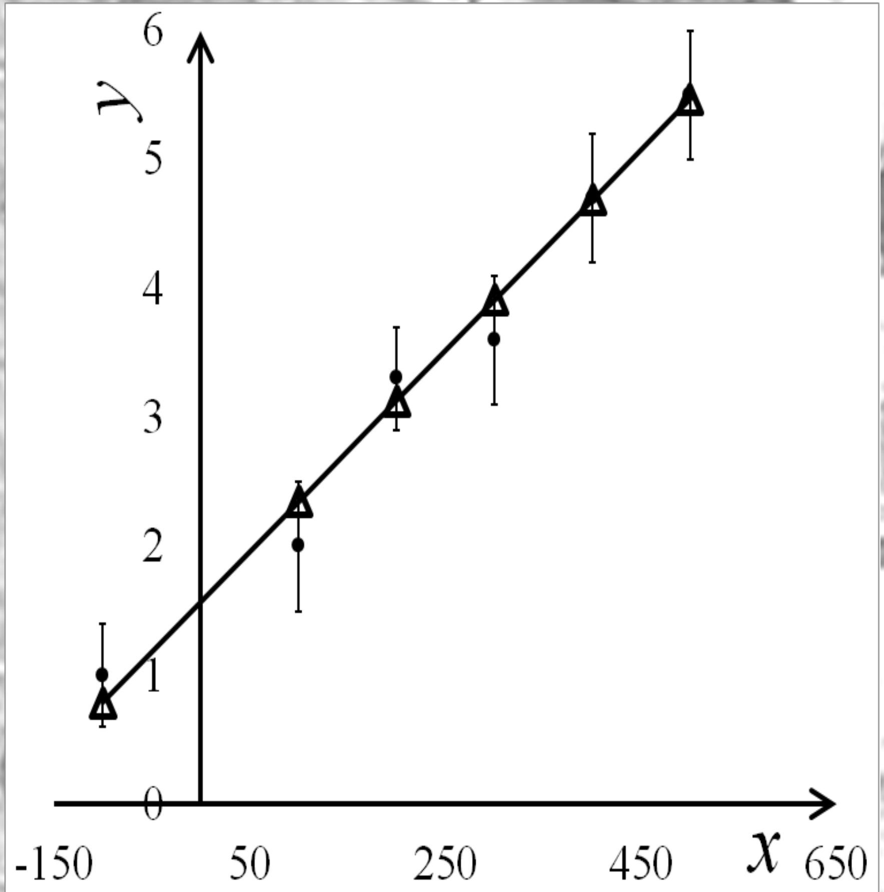
$$\text{Se } \sigma_Y \leq \delta y$$



Potremmo abbattere l'incertezza statitisca e quindi ricalcolare le incertezze su *A* e *B*

Sconto per le superiori buone le stime e buona la legge niente ricalcolo.

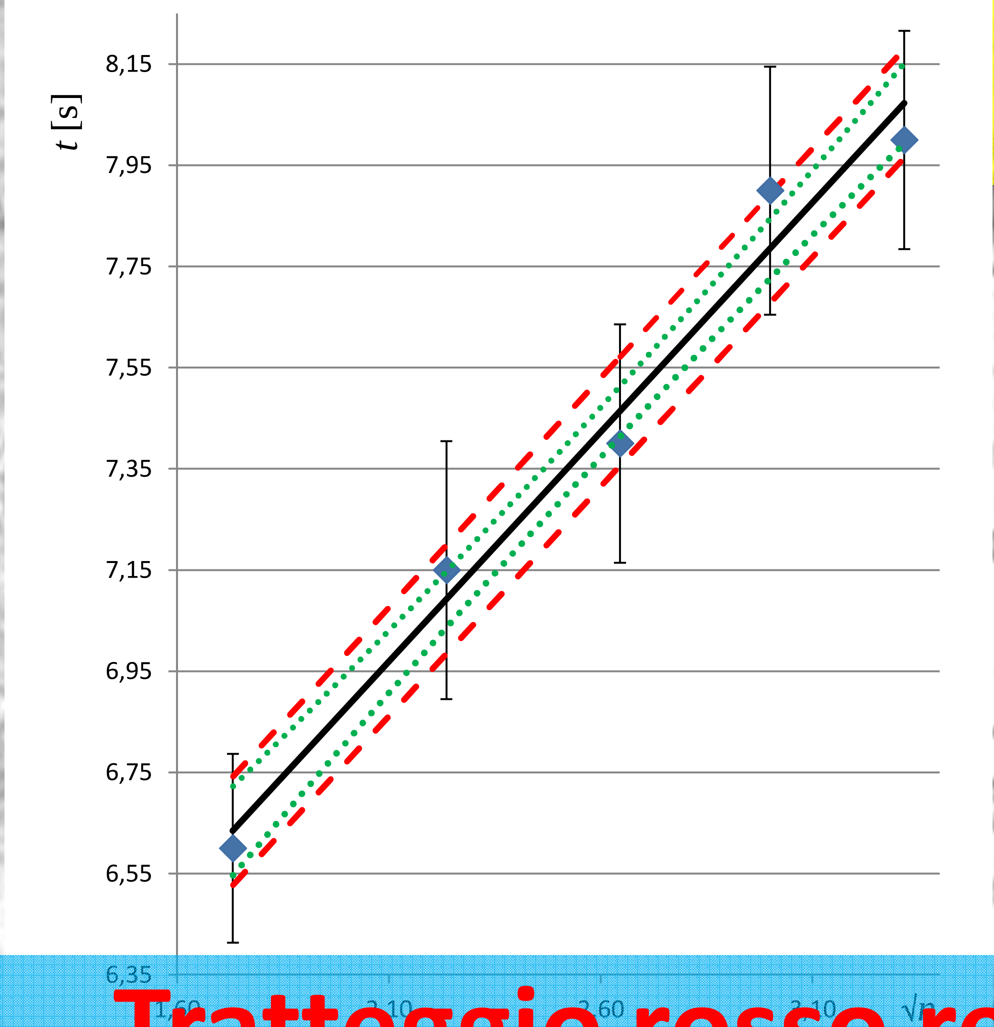
Stima sull'interpolazione



Ci permette di capire cosa vogliamo dire

Incertezza sulla y dedotta dalla legge (interpolazione). Per esempio calibriamo un Sistema, ed usiamo il valore y dedotto da y=A+Bx

Se possiamo accettare la legge?



$$\text{Se } \sigma_Y \le \delta y$$

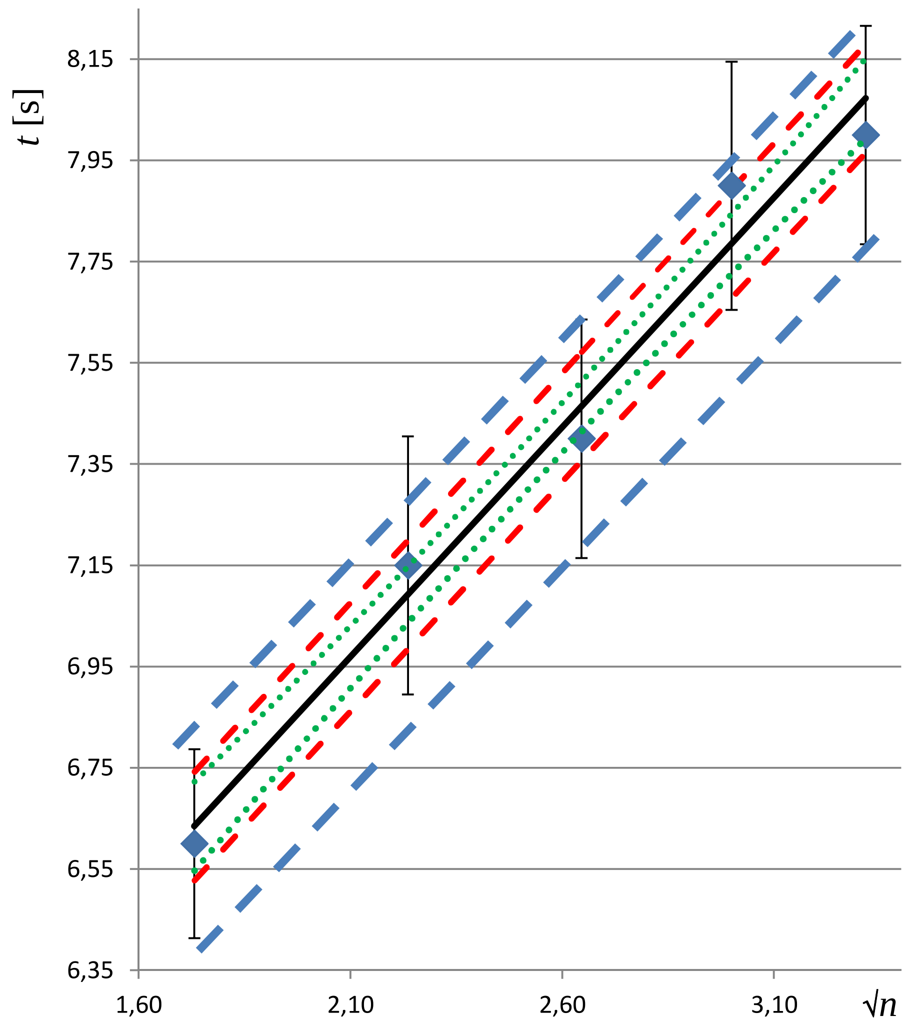
$$\delta Y = \sqrt{\sigma_Y^2 + \varepsilon_y^2}$$

Figura 1: dati sperimentali (rombi celesti) con barre d'errore rispettive δy_i secondo la tabella 1, retta di regressione (linea continua nera), pallini rossi e retta tratteggiata in rosso $Y \pm \delta Y$, curve punteggiante in verde $Y \pm \sigma_{y\text{-}interp}$.

Tratteggio rosso rette $Y+\delta Y$ e $Y-\delta Y$

previsione al 68 % incluse le incertezza

Per le superiori teniamo δy



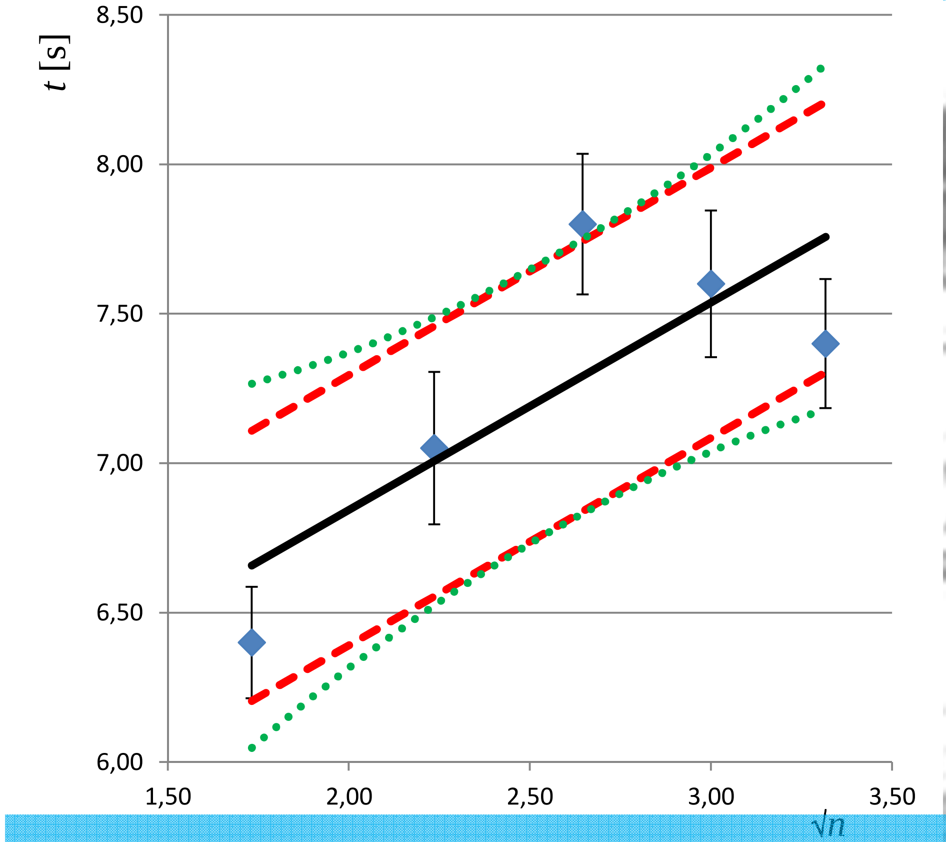
$$\text{Se } \sigma_Y \leq \delta y$$

$$\delta Y = \delta y$$

Figura 1: dati sperimentali (rombi celesti) con barre d'errore rispettive δy_i secondo la tabella 1, retta di regressione (linea continua nera), pallini rossi e retta tratteggiata in rosso $Y \pm \delta Y$, curve punteggiante in verde $Y \pm \sigma_{y\text{-}interp}$.

Tratteggio celeste rette $Y+\delta y$ e $Y-\delta y$

Se non possiamo accettare la legge?



$$\text{Se } \sigma_Y > \delta y$$

$$\delta Y = \sqrt{\sigma_Y^2 + (\delta y)^2}$$

Figura 1: dati sperimentali (rombi celesti) con barre d'errore rispettive δy_i secondo la tabella 1, retta di regressione (linea continua nera), pallini rossi e retta tratteggiata in rosso $Y \pm \delta Y$, curve punteggiante in verde $Y \pm \sigma_{y\text{-}interp}$.

Non accettiamo la legge

Forniamo comunque una stima per Y+δY **e** *Y-δY* al 68 % incluse le incertezze

Scappatoie: … brutte conseguenze

- Le scappatoie spesso ci portano a conclusioni stridenti….
  - Esempi …
- Dovremmo digerire noi docenti l’approccio rigoroso ed … addolcire la pillola per gli studenti.
- Noi docenti dovremmo avere il quadro della situazione, per indirizzare gli studenti.

ESEMPIO didattico: Parto dal MMQ (non pesati)

d = 12.66 mm

h = 1451 mm	h = 1230 mm	h = 1022 mm	h = 629 mm	h = 827 mm
	1230	1022d	~~829~~ 629	827
	d = 12.67 mm	d = 12.68 mm	12.67 mm	12.68
56031	51639	49840	38845	42675
55912	51820	47607	38099	42568
56507	51530	47748	37094	42365
56328	50885	47288	37237	42119
56629	51722	46862	37829	42338
56146	51571	47643	37528	42447
56100	51441	46592	37263	42586
55888	51547	47248	37658	42473
55990	52536	48370	38154	42408
56062	51788	48254	37406	42780

Dati presi con i docenti del TFA il 2 aprile 2014

Dati caduta del grave

d_{biglia}		h		δh	$\delta h/h$	h		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	c_{media}	σ_c	σ_c/c	t
[mm]		[mm]	[mm]	[mm]		[m]															[s]
12.66	1	1451	1444.7	0.5025	3.E-04	1.4447	cont.	56031	55912	56507	56329	56629	56146	56100	55888	55990	56062	**56159**	**250**	4.E-03	0.562
12.67	2	1230	1223.7	0.5025	4.E-04	1.2237	cont.	51639	51820	51530	50885	51722	51571	51441	51547	52536	51788	**51648**	**408**	8.E-03	0.516
12.68	3	1022	1015.7	0.5025	5.E-04	1.0157	cont.	49840	47607	47748	47288	46862	47643	46592	47248	48370	48254	**47745**	**921**	2.E-02	0.477
12.68	4	827	820.7	0.5025	6.E-04	0.8207	cont.	42675	42568	42365	42119	42338	42447	42586	42473	42408	42780	**42476**	**188**	4.E-03	0.425
12.67	5	629	622.7	0.5025	8.E-04	0.6227	cont.	38845	38099	37094	37237	37829	37528	37263	37659	38154	37406	**37711**	**536**	1.E-02	0.377

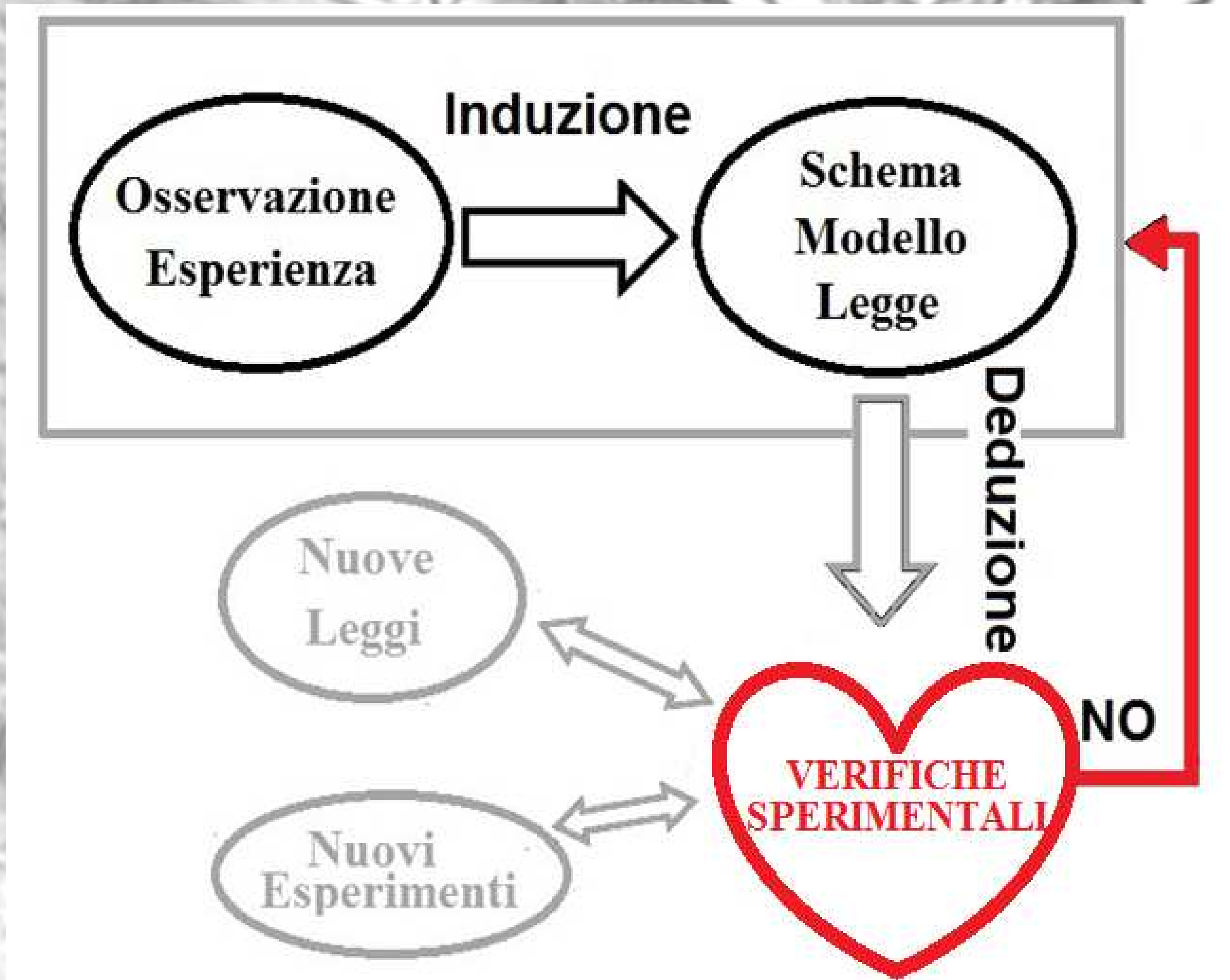
	x	y				δy
	$h^{1/2}$	t	σ_t	ε_t	$\varepsilon_t/3^{1/2}$	δt
	[$m^{1/2}$]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]
1	1.202	0.5620	0.0025	5.00E-06	2.9E-06	2.5E-03
2	1.1062	0.5165	0.0041	5.00E-06	2.9E-06	4.1E-03
3	1.0078	0.4775	0.0092	5.00E-06	2.9E-06	9.2E-03
4	0.9059	0.4248	0.0019	5.00E-06	2.9E-06	1.9E-03
5	0.7891	0.3771	0.0054	5.00E-06	2.9E-06	5.4E-03

g_{att} =	9.81	m s^{-2}
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
9.15	0.08	7.8
9.17	0.15	4.3
8.9	0.3	2.6
9.10	0.09	8.2
8.76	0.26	4.1

Per qualsiasi *h*,
devo rigettare l'ipotesi

Ogni corsista deve rigettare il valore atteso.

Riconsidero il modello



$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 \Rightarrow$$

$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h}$$

Ovviamente in questo caso, sapendo già il problema, dopo sensate iterazioni (mani e cervello) ho già fatto prendere i dati di *t* al variare di *h*.

Dati caduta del grave

d_{bilia}		h'	h	δh	$\delta h/h$	h
[mm]		[mm]	[mm]	[mm]		[m]
12.66	1	1451	1444.7	0.5025	0.03%	1.4447
12.67	2	1230	1223.7	0.5025	0.04%	1.2237
12.68	3	1022	1015.7	0.5025	0.05%	1.0157
12.68	4	827	820.7	0.5025	0.06%	0.8207
12.67	5	629	622.7	0.5025	0.08%	0.6227

t	σ_t	σ_t / t
[s]	[s]	
0.5620	0.0025	0.4%
0.516	0.004	0.8%
0.477	0.009	1.9%
0.4248	0.0019	0.4%
0.377	0.005	1.4%

Sul tempo abbiamo l'incertezza relativa maggiore, percui dobbiamo sceglierla come variabile dipendente.

		x	y				δy					
		$h^{1/2}$	t	σ_t	ε_t	$\varepsilon_t/3^{1/2}$	δt	Yi	xy	x^2	$(\Delta y)^2$	χ^2
		[m$^{1/2}$]	[s]	[s]	[s]	[s]	[s]					
	1	1.202	0.5620	0.0025	5.00E-06	2.9E-06	2.5E-03	0.561406	0.675524	1.444804	3.53E-07	0.056
	2	1.1062	0.5165	0.0041	5.00E-06	2.9E-06	4.1E-03	0.518336	0.5713523	1.223678	3.37E-06	0.201
	3	1.0078	0.4775	0.0092	5.00E-06	2.9E-06	9.2E-03	0.474098	0.4812245	1.015661	1.16E-05	0.137
	4	0.9059	0.4248	0.0019	5.00E-06	2.9E-06	1.9E-03	0.428286	0.38482632	0.820655	1.21E-05	3.365
N	5	0.7891	0.3771	0.0054	5.00E-06	2.9E-06	5.4E-03	0.375775	0.29756961	0.622679	1.76E-06	0.06
somme		5.011	2.3579	medie	5.00E-06	2.89E-06	4.62E-03		2.41049673	5.1274769	2.92E-05	3.819
		Σx	Σy		δy				Σxy	Σx^2		

Attenzione a Y_i (curva teorica) calcolati da A e B, da confrotarli con y_i, che hanno 4 cifre significative, percui almeno le stesse se non una in più.
Spesso ho visto rigettare dei modelli (leggi) per calcoli approssimati in modo grossolano.

Nuovo modello : $h=1/2gt^2$ -> $h=1/2g(t+t_0)^2$

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

$A=$	2.101E-02		$\delta A=$	0.00973722	46%
$B=$	4.496E-01		$\delta B=$	0.009615418	2%
$\Delta=$	5.273E-01				
$\sigma_Y=$	3.1E-03	<	0.005	δt medio	
$\delta Y=$	3.1E-03				
$\delta t=$	4.6E-03				
$t_0=$	-21	±	10	ms	

$\sigma_Y < \delta y$ **(medio), modello accettato**

$g=$	9.8950365
$\delta g=$	0.423262

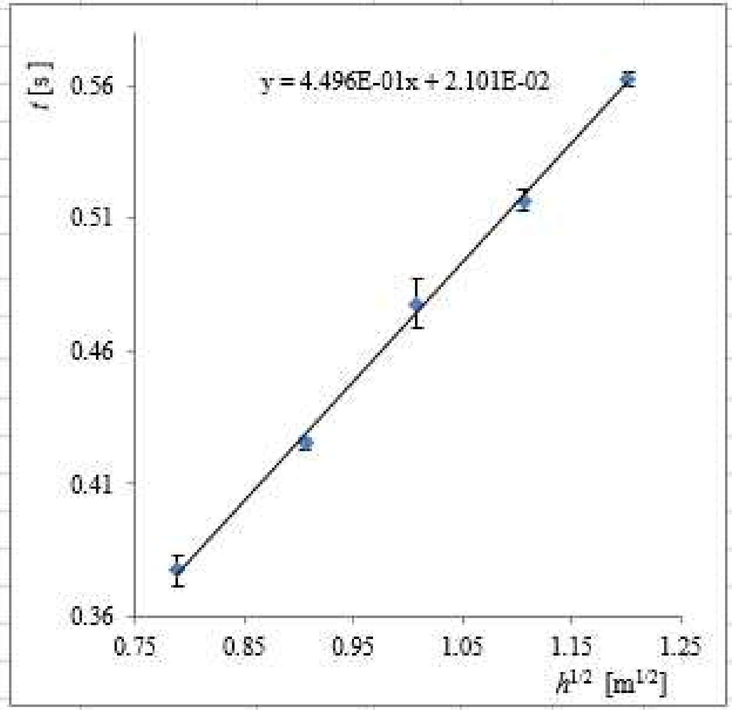
$$\sigma_A = \sigma\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \overset{\sigma\equiv\delta y}{\Longrightarrow} \left\{\delta A = \delta y\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}\right.$$

$$\sigma_B = \sigma\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \overset{\sigma\equiv\delta y}{\Longrightarrow} \left\{\delta B = \delta y\sqrt{\frac{N}{\Delta}}\right.$$

$g=$	9.9	±	0.4 m s^{-2}

$(g-g_{att})/\delta g$ 0.21

$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}$$



da $B=(2/g)^{1/2}$ ottengo g = 9.9 ± 0.4 m s^{-2}

O potrei usare t_0 misurato con laregressione per ogni singola misura (studente)

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2$$

g_{att} =	9.81	m s^{-2}
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
9.15	0.08	7.8
9.17	0.15	4.3
8.9	0.3	2.6
9.10	0.09	8.2
8.76	0.26	4.1

calibrato	t_0= -21 $\pm$ 10 ms	
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
9.9	0.4	0.15
10.0	0.5	0.30
9.7	0.8	0.08
10.1	0.5	0.47
9.8	0.8	0.01

Perché ci dice ciò?

- Rigore …
- Semplificazioni e sbrodolamenti.
  - Approccio con media e deviazione standard per misure ripetute e propagazione lineare delle incertezze. Massima e minima pendenza per la legge.
  - Approccio con valore centrale semidispersione e propagazione lineare. Massima e minima pendenza per la legge.

Somma lineare delle incertezze, e regressione con rette di max e min pendenza

	x	y			δy					
	$h^{1/2}$	t	σ_t	ε_t	δt	Yi	$max\ p$	$min\ p$	$(\Delta y)^2$	χ^2
1	1.202	0.5620	0.0025	0.000005	0.0025	0.56200	0.5645	0.5595	0.00E+00	0.00
2	1.1062	0.5165	0.0041	0.000005	0.0041	0.51910			6.76E-06	0.40
3	1.0078	0.4775	0.0092	0.000005	0.0092	0.47504			6.07E-06	0.07
4	0.9059	0.4248	0.0019	0.000005	0.0019	0.42940			2.12E-05	5.84
5	0.7891	0.3771	0.0054	0.000005	0.0054	0.37710	0.3717	0.3825	0.00E+00	0.00
somme					0.004625				3.40E-05	1.26
						Δy	0.1928	0.1770		

$A=$	2.1010E-02				
$B=$	4.4960E-01				
$B_{max}=$	4.6697E-01	A'	3.2126E-03		
$B_{min}=$	4.2865E-01	A''	4.4256E-02		
$B_{VC}=$	4.4781E-01	$A_{VC}=$	0.02373456		
$\delta\Delta_B/2=$	1.9157E-02	$\delta\Delta_A/2$	2.0522E-02		
$s_Y=$	0.0026	<	0.005	δt medio	
δy	0.004625				
$t_0=$	-24	$\pm$	21		ms
$g=$	9.973462041				
$\delta g=$	8.5333E-01				
$g=$ 9.97	$\pm$		0.9 m s^{-2}		
$(g-g_{att})/\delta g$	0.19				

$s_Y < \delta y$ (medio), modello accettato

Dalla regressione $g = 10.0 \pm 0.9$ m s^{-2}

e regressione $t_0 = -24 \pm 21$ ms

confronto

$g = 9.9 \pm 0.4$ m s^{-2}

$t_0 = -21 \pm 10$ ms

calibrato		
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
9.9	0.4	0.15
10.0	0.5	0.30
9.7	0.8	0.08
10.1	0.5	0.47
9.8	0.8	0.01

$g = 10.0 \pm 0.9$ m s^{-2}

$t_0 = -24 \pm 21$ ms

calibrato		
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
10.0	0.9	0.21
10.1	1.0	0.27
9.9	1.3	0.05
10.2	1.2	0.35
10.0	1.5	0.12

Tutto con val. centr. e semidisp.

	$h^{1/2}$	t	$\Delta_c/2$	ε_t		δt	Yi		min pend	max pend	$(\Delta y)^2$	χ^2
1	1.202	0.5630	0.0037	0.000005		0.0037	0.5630		0.559300	0.5667	1.23E-32	0.00
2	1.1062	0.5171	0.0083	0.000005		0.0083	0.5205				1.14E-05	0.16
3	1.0078	0.4822	0.0162	0.000005		0.0162	0.4768				2.93E-05	0.11
4	0.9059	0.4245	0.0033	0.000005		0.0033	0.4316				4.97E-05	4.57
5	0.7891	0.3797	0.0088	0.000005		0.0088	0.3797		0.3885	0.3709	3.08E-33	0.00
		2.3665				0.00806		ΔY	0.170800	0.195800	9.04E-05	4.84

	$A=$	2.1010E-02				
	$B=$	4.4960E-01				
	$B_{max}=$	4.14E-01	A'	6.2081E-02		
	$B_{min}=$	4.74E-01	A''	-3.2966E-03		
	$B_{VC}=$	0.443933156	$A_{VC}=$	0.02939235		
	$\delta\Delta_B/2=$	0.030273674	$\delta\Delta_A/2$	3.2689E-02		
	$s_Y=$	0.0048	<	0.008	δt medio	
	δy	0.008				
	$t_0=$	-29	±	33		ms
	$g=$	10.14833585				
	$\delta g=$	1.3841E+00				
$g=$	10.2	±	1.4	m s^{-2}		
$(g-g_{att})/\delta g=$		0.25				

$s_Y < \delta y$ (medio), modello accettato

Dalla regressione $g = 10.2 \pm 1.4$ m s^{-2}

e regressione $t_0 = -29 \pm 33$ ms

confronto

Media e dev. st. c. e regressione lineare (MMQ).

$g = 9.9 \pm 0.4$ m s^{-2}

$t_0 = -21 \pm 10$ ms

calibrato		
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
9.9	0.4	0.15
10.0	0.5	0.30
9.7	0.8	0.08
10.1	0.5	0.47
9.8	0.8	0.01

Media e dev. st. c. e max e min pendenza.

$g = 10.0 \pm 0.9$ m s^{-2}

$t_0 = -24 \pm 21$ ms

calibrato		
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
10.0	0.9	0.21
10.1	1.0	0.27
9.9	1.3	0.05
10.2	1.2	0.35
10.0	1.5	0.12

Val. centr., semidisp. e max e min pendenza.

$g = 10.2 \pm 1.4$ m s^{-2}

$t_0 = -29 \pm 33$ ms

calibrato		
g	δg	$(g-g_{att})/\delta g$
[m s^{-2}]	[m s^{-2}]	
10.1	1.4	0.23
10.3	1.7	0.27
9.9	2.1	0.04
10.5	1.9	0.36
10.1	2.4	0.13

Se sbrodoliamo non abbiamo problemi ad accettare l'ipotesi, ma potremmo essere poco risolutivi per rifiutarne un'altra

Esempi a costo zero

- Pendolo, potete farlo a casa, provate a verificare se $T=T(l)$ o $T=T(l^{1/2})$ o $T^2= T^2(l)$
- Provare con bilia o cilindro su un tavolo inclinato

$$
\begin{cases}
\text{sfera} & a = \frac{5}{7} g \sin\theta \\
\text{cilindro} & a = \frac{2}{3} g \sin\theta \\
\text{tubo} & a = \frac{2}{3} \frac{r_2^2}{r_2^2 + r_1^2/3} g \sin\theta
\end{cases}
$$

Siete in grado di rigettare la legge del punto materiale ($a=g\sin\theta$)?

Fate l'analisi a priori, per vedere di quanto sollevare il tavolo, per risolvere bene e non avere bilie, che rotolano troppo rapidamente.

Indicazioni

La misura del tempo viene registrata acquisita da un computer e registrata. Se studiamo il moto del corpo lasciato libero all'inizio del piano inclinato, osserviamo che possiamo misurare la distanza tra i due traguardi Δs ed il tempo, che impiega il corpo a percorrete tale distanza Δt. Il rapporto $\Delta s/\Delta t$ è la velocità media. Spostando il secondo traguardo si può quindi misurare la velocità media. Assumiamo che la velocità che il corpo ha al primo traguardo sia v_1 e che la velocità nei traguardi successivi sia v_n, dove per $n = 1, 2, 3, \ldots$ indichiamo le possibili posizioni del secondo traguardo. La velocità media $v_m = \Delta s/\Delta t$ risulta aumentare in modo lineare con il tempo. Questo implica che la variazione della velocità sia costante. In tali condizioni sappiamo che la velocità media può essere data come $v_m = (v_1 + v_n)/2$ per qualsiasi posizione n. Pertanto si ottiene $v_m = (v_1 + v_1 + at)/2$, ovvero si osservi che

$$v_m = v_1 + \frac{1}{2}at \qquad (7)$$

Si può quindi derivare l'accelerazione di un corpo solido, che rotoli su un piano inclinato, dallo studio della dipendenza della velocità media in funzione

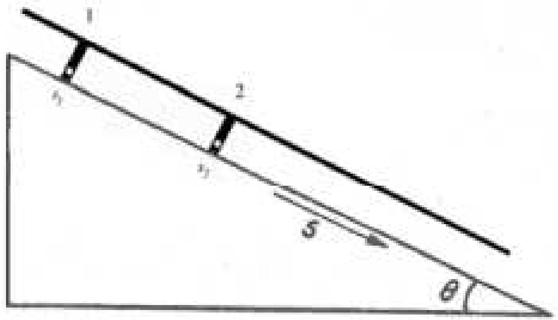
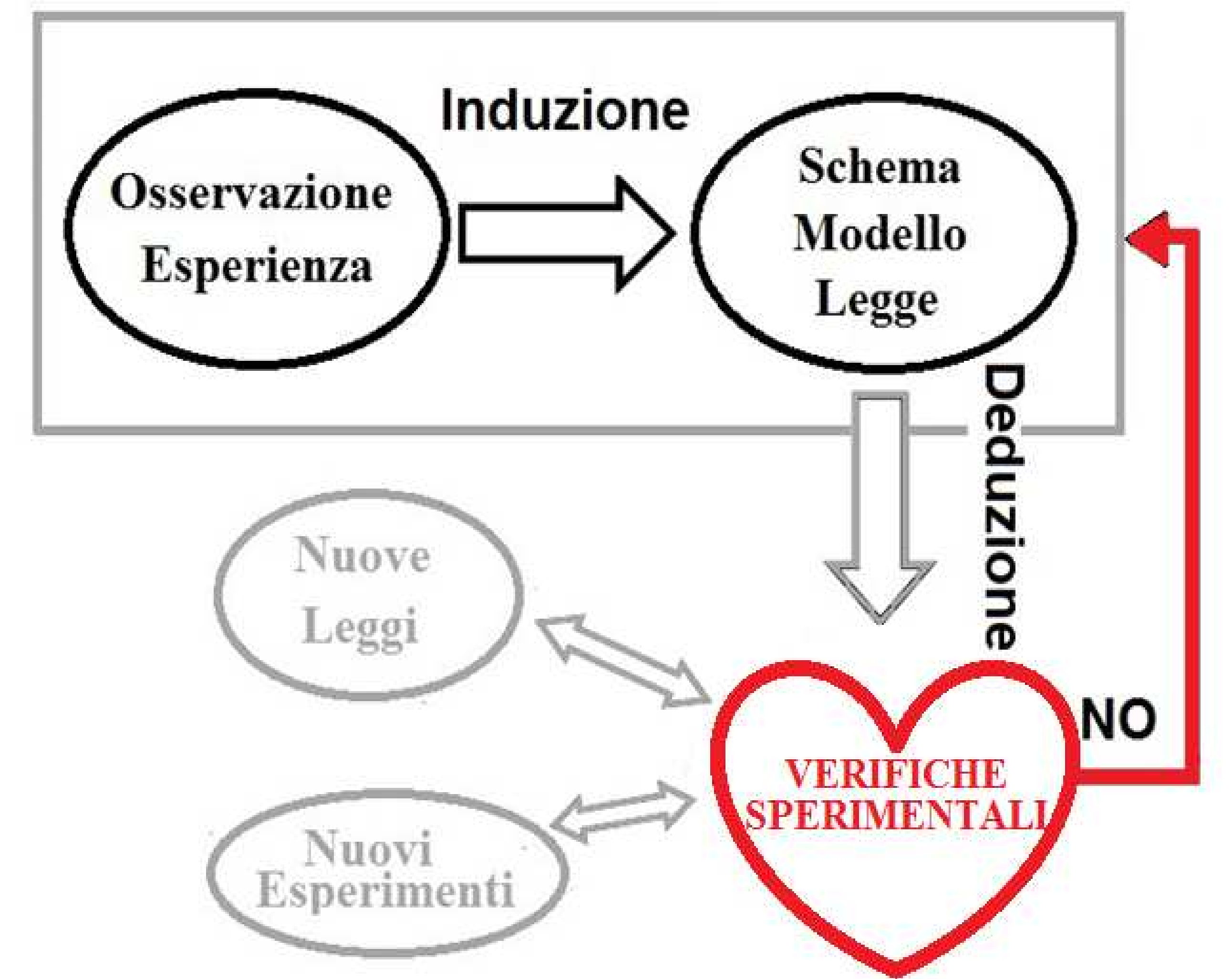


Figura 6: Piano inclinato equipaggiato con due traguardi: 1) fisso, 2) mobile.

Provate a fare Prima l'analisi a priori
Piano di un tavolo 170 cm,
Spessori sotto il tavolo da decidere sulla base dell'analisi

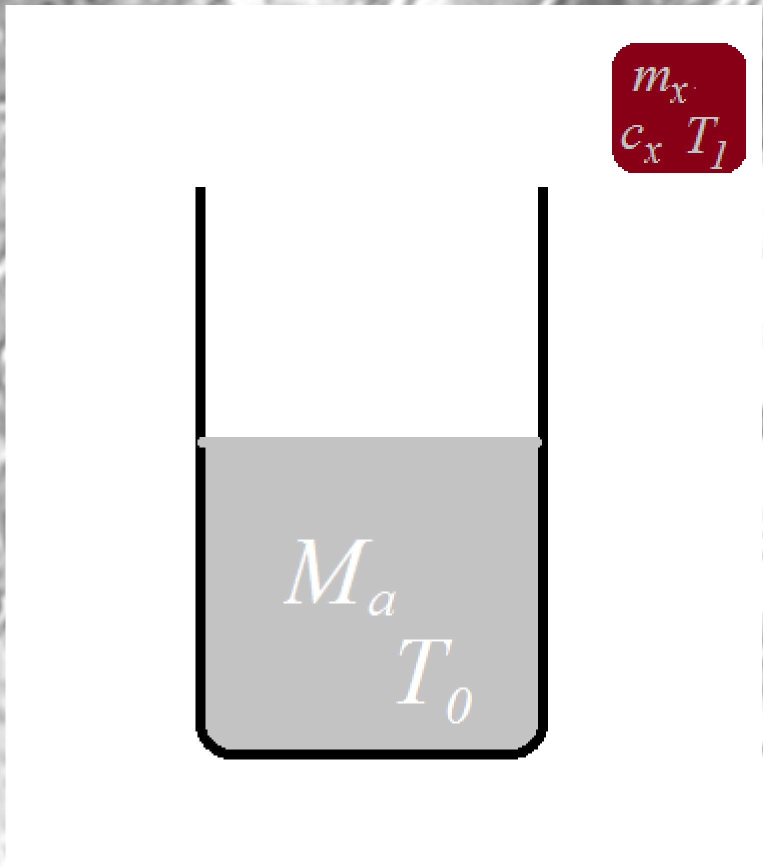
NUOVO ESEMPIO

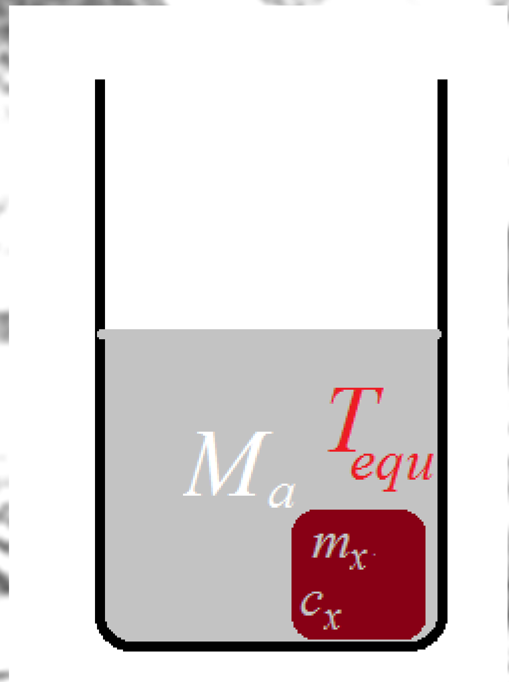


IL CALORIMETRO un modellino semplici, un problema di gestione dell'esperienza.

Modello

M_a Massa d'acqua a T_0, Corpo m_x c_x a T_1





$$m_x c_x (T_1 - T_{equ}) = M_a c_a (T_{equ} - T_0)$$

Voglio utilizzarlo per misura c_x

- Analisi a priori:

$$c_x = \frac{M_a}{m_x}\frac{(T_{equ}-T_0)}{(T_1-T_{equ})}c_a$$

$$\frac{\delta c_x}{c_x} = \frac{\delta m_x}{m_x} + \frac{\delta M_a}{M_a} + \frac{\delta(T_1-T_{equ})}{(T_1-T_{equ})} + \frac{\delta(T_{equ}-T_0)}{(T_{equ}-T_0)} + \frac{\delta c_a}{c_a}$$

$$\frac{\delta c_x}{c_x} = \frac{\delta m_x}{m_x} + \frac{\delta M_a}{M_a} + \frac{\delta T_1+\delta T_{equ}}{(T_1-T_{equ})} + \frac{\delta T_{equ}+\delta T_0}{(T_{equ}-T_0)} + \frac{\delta c_a}{c_a}$$

- 50 g di alluminio, c_x=0.208 cal g^{-1} K^{-1} , si raggiungerebbe una t di equilibrio

$$m_x c_x (T_1 - T_{equ}) = M_a c_a (T_{equ} - T_0)$$

$$\frac{m_x c_x T_1 + M_a c_a T_0}{M_a c_a + m_x c_x} = T_{equ} \qquad \frac{50\ \mathrm{g}\ 0.214\ c_a 100\ °\mathrm{C} + 500\ \mathrm{g}\ c_a\ 20\ °\mathrm{C}}{50\ \mathrm{g}\ 0.214\ c_a + 500\ \mathrm{g}\ c_a} = T_{equ}$$

$$\frac{50\ \ 0.214\ \ 100 + 500\ 20}{50\ \ 0.214 + 500}\ °\mathrm{C} = T_{equ} = 21.7$$

$$\frac{500\ 0.214\ \ 100 + 1000\ 20}{500\ 0.214 + 1000}\ °\mathrm{C} = T_{equ} = 27.7$$

Misura con Alluminio

m_x= 497.27 g, M_a= 854.36 $\pm$ 0.02 g,

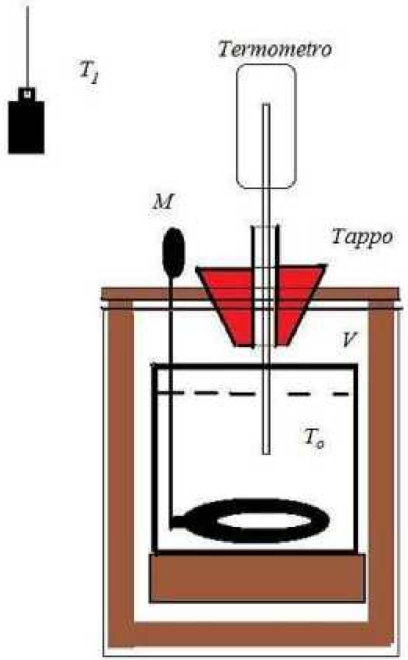
Misure di T con termocoppia:

$T_{eb}=T_1$=98.1 °C, T_o=18.2 °C, T_{equ}=22.7 °C.

Risulta:

c_x=0.189 + 0.003 c_a , valore atteso 0.214 c_a

Devo ritornare sul modello



$$M_x \cdot c_x(T_1 - T_{eq}) = M_{sist} \cdot c_{sist}(T_{eq} - T_o), \tag{31}$$

dove c_x e M_x sono la massa ed il calore specifico (da determinare) del materiale, T_1 è la temperatura, alla quale è stato portato il solido prima di introdurlo nel bagno del calorimetro, T_0 la temperatura dell'acqua subito prima dell'inserimento di M_x, T_{eq} la temperatura di equilibrio raggiunta dai due corpi. $M_{sist}c_{sist}$ è la capacità termica del sistema calorimetro. Tale quantità è data dalla somma delle capacità termiche di tutti i corpi, che costituiscono il calorimetro: il vaso calorimetrico, il miscelatore, il termometro e la massa d'acqua utilizzata $M_a c_a$.

$$M_{sist}c_{sist} = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot c_i + M_a \cdot c_a = m_{equiv} \cdot c_a + M_a \cdot c_a. \tag{32}$$

Bisogna quindi determinare sperimentalmente questa massa equivalente, mediante una procedura calibrazione del calorimetro. Tale procedurà permetterà di sostituire $\sum_{i=1}^{n} M_i c_i$ con l'equivalente capacità termica di una opportuna quantità di acqua.

Si fa notare che si userà sempre l'equazione 32, nella quale si sostituirà $\sum_{i=1}^{n} M_i c_i$ con $m_{equiv}c_a$, capacità termica equivalente data m_{equiv}, per il calore specifico dell'acqua c_a.

Calibrazione del calorimetro

Si supponga di utilizzare un quantitativo m_a' di acqua scaldato ad una temperatura T_1' e di inserirlo nel calorimetro, dove si trova una massa di acqua m_a alla temperatura T_o'. Si utilizzerà l'equazione 31, si individuano le temperature per questa procedura con l'apostrofo così anche la massa d'acqua (che indicheremo con la lettera miniscola (m_a), presente nel vaso calorimetrico calorimetro, l'equazione perciò diventa:

$$m_a' c_a (T_1' - T_{eq}') = (m_{equiv} + m_a) c_a (T_{eq}' - T_o'),$$

Dalla quale è immediato ricavare la massa equivalente in acqua m_{equiv} del calorimetro:

$$m_{equiv} = m_a' \frac{(T_1' - T_{eq}')}{(T_{eq}' - T_o')} - m_a \tag{33}$$

Ottenuta m_{equiv}, che possiamo determinare dalla misure dirette delle masse di acqua e delle temperature, si ritorna all'equazione 31 da cui si ottiene: $M_x c_x (T_1 - T_e q) = (m_{equiv} c_a + M_a c_a)(T_{eq} - T_o)$, quindi:

$$c_x = \frac{(m_{eq} + M_a)}{M_x} \frac{(T_{eq} - T_o)}{(T_1 - T_{eq})} c_a \tag{34}$$