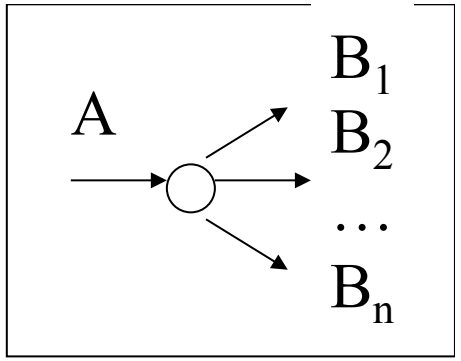
Decadimenti nucleari

- Cinematica dei decadimenti a due e tre corpi
- Vite media, velocità di decadimento e rapporti di diramazione
- Decadimenti alfa
- Decadimenti beta e l'ipotesi del neutrino
- Decadimenti di sistemi atomici
- Decadimenti gamma di nuclei
- Decadimenti α come sorgenti di energia
- Rutherford back scattering
- Datazioni con radio carbonio
- Decadimenti beta$^+$ e catture di elettroni

Cinematica dei decadimenti



- Consideriamo un processo di decadimento $A \rightarrow B_1 + B_2 + \ldots B_n$.
- Ci chiediamo che cosa sappiamo dire sulla cinematica del processo.
- Il riferimento in cui A è in quiete è il riferimento del centro di massa del sistema, dunque la conservazione dell'energia e impulso dà:

$$m_A = E_1 + E_2 + \ldots E_n \, .$$

$$0 = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} + \ldots \mathbf{p_n}$$

- Condizione necessaria perché il processo avvenga è che:

$$Q = m_A - \Sigma_f m_f > 0$$

Cinematica dei decadimenti a due e tre corpi

- Per il decadimento in due corpi è fissata l'energia di ciascuna particella prodotta
- Per un decadimento in più di due corpi lo spettro di energia di ciascuna particella *i* è continuo, da un minimo ($E_i=m_i$) a un valore massimo*.
- Se una delle particelle (B) nello stato finale **è molto più pesante delle altre**, può bilanciare l'impulso di queste sottraendo una piccola parte dell'energia cinetica. In pratica, le energie delle altre delle altre (j) sono soggette solo alla condizione:

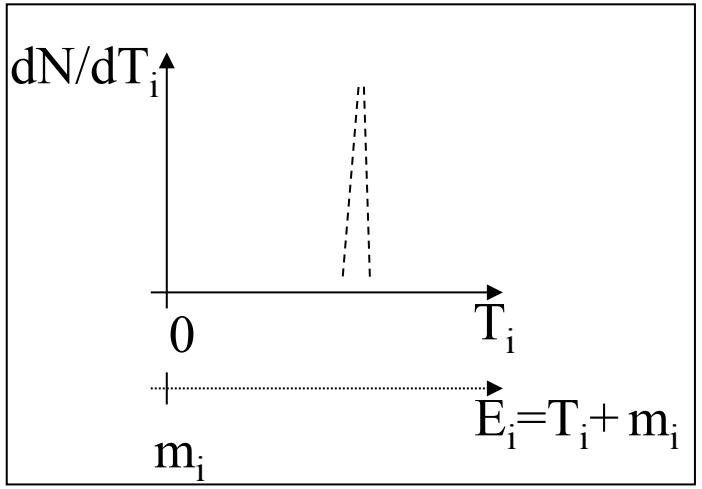
$$\Sigma_j E_j = m_A - m_B.$$

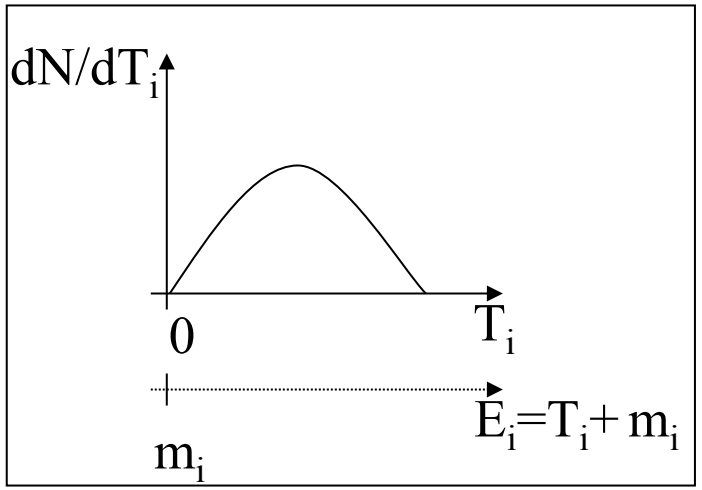
- In questo caso, se il decadimento è in due corpi (A-> B+C) ho $E_c = m_A - m_B$, se in più di due corpi ((A-> B+C +X) l'energia di C varia fra:

$$E_{min} = m_c \text{ e } E_{max} = m_A - m_B - m_X$$

e per le energie cinetiche, fra:

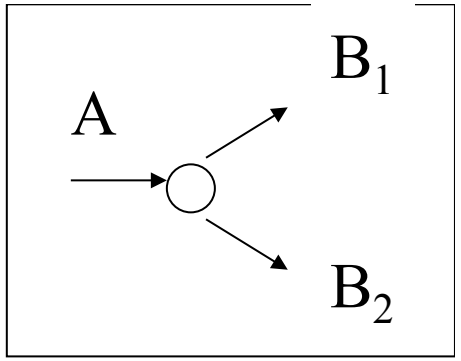
$$T_{min} = 0 \text{ e } T_{max} = m_A - m_B - m_X - m_c$$





*La cinematica determina solo gli estremi dello spettro energetico; è la dinamica che ne determina la forma

Formule utili per i decadimenti a due corpi



- Si parte dalla conservazione di impulso ed energia
- Nel sistema di quiete del corpo che decade:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$$

$$E_1 + E_2 = M_A \quad \Rightarrow \quad M_A = \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2}$$

- Dopo un po' di algebra si ricava

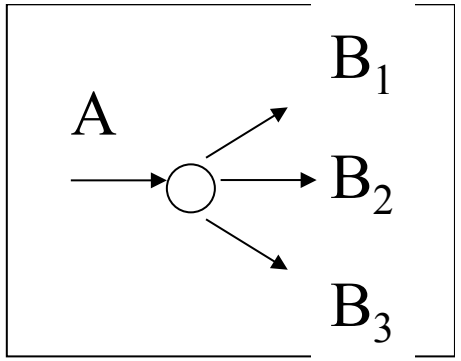
$$p = \frac{1}{2M_A}\sqrt{[M_A^2 - (m_1 + m_2)^2][M_A^2 - (m_1 - m_2)^2]}$$

$$E_1 = \frac{1}{2M_A}(M_A^2 + m_1^2 - m_2^2)$$

$$E_2 = \frac{1}{2M_A}(M_A^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

- Se una delle particelle (ad esempio B_1) nello stato finale **è molto più pesante dell'altra**, si fa uno sviluppo in serie, trascurando m_2 rispetto a m_A e m_1, ottenendo $E_1 \approx m_2, E_2 \approx M_A - m_1$
- per le energie cinetiche, $T_1 \sim 0$ e $T_2 \sim M_A - m_1 - m_2$

Formule utili per i decadimenti a tre corpi



- Si parte dalla conservazione di impulso ed energia
- La scriviamo in termini quadrivettoriali: $P = p_1+p_2+p_3$

$$s_1 = (P - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2$$
$$s_2 = (P - p_2)^2 = (p_3 + p_1)^2$$
$$s_3 = (P - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2$$
$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

- Calcolo s_1 nel sistema di quiete di A:

  $s_1 = M^2 - 2ME_1 + m_1^2$

- Dato che $E_1 \geq m_1$, $\max(s_1) = M^2 - 2Mm_1 + m_1^2 = (M-m_1)^2$

- Mi metto nel sistema di quiete di 2+3 ($p'_2 = -p'_3$) e faccio un ragionamento analogo:

  $s_1 = (p'_2+p'_3)^2 = (E'_2+E'_3)^2 \geq (m_2+m_3)^2 \rightarrow \min(s_1) = (m_2+m_3)^2$

- Il massimo per E_1 si avra' quando s_1 e' minimo:

$$\max(E_1) = \frac{1}{2M}[M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2]$$

$$\max(p_1) = \sqrt{\max(E_1)^2 - m_1^2} = \frac{1}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2 + m_3)^2][M^2 - (m_2 + m_3 + m_1)^2]}$$

- Facendo lo stesso ragionamento della pagina precedente ($m_3 >> m_1, m_2$) ottengo

$$\max(E_1) = M - m_3 - m_2, \qquad \max(T_1) = M - m_3 - m_2 - m_1$$

Vite media, velocità di decadimento e larghezza di una particella

- Se al tempo t=0 ho N_0 particelle instabili in quiete, si osserva che dopo un tempo t ne sono sopravvissute:

  (1) $$N(t)=N_0\, e^{-t/\tau}$$
- Il fattore τ si chiama vita media della particelle*.
- Dalla (1) segue che la probabilità di decadimento per unità di tempo, detta velocità di decadimento, è:

$$\lambda=(\Delta N/\Delta t)/N = 1/\tau$$
- Osservare che λ è indipendente dal tempo, cioè il processo di decadimento non ha memoria **(processo Markoviano)
- Si può introdurre una larghezza naturale, $\Gamma=\hbar/\tau$, con le dimensioni di un'energia, che esprime l'indeterminazione in energia di un sistema instabile.

* Si usa definire un tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ come il tempo dopo il quale ne sono sopravvissute la metà.

$$\frac{N(t_{1/2})}{N(0)} = \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} \iff -\ln 2 = -t_{1/2}\tau \iff t_{1/2} = \ln 2\,\tau \approx 0.693\,\tau$$

**Esercizio: confrontare la curva di sopravvivenza di una popolazione di particelle e di uomini

La relazione energia-tempo

- Formalmente simile a $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, si può stabilire una relazione fra l'energia e il tempo

  (1) $$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

  il cui significato è profondamente diverso, in quanto in M.Q. l'energia è un osservabile (un operatore hermitiano) mentre il tempo è un parametro.
- La (1) dice che una misura di energia effettuata in un tempo finito Δt è affetta da un errore che è almeno $\Delta E = \hbar/(2\,\Delta t)$
- La (1) è figlia dell'equazione classica delle onde e della relazione quantistica $E = \hbar\,\omega$. Per giustificarla, consideriamo una sorgente di onde sinusoidali con frequenza ω_o, smorzata esponenzialmente: $A(t) = \exp(i\omega_o t - \gamma t)$.
- Se l'intensità dell'onda (prop. a $|A|^2$) decresce con fattore di decadimento τ ho $2\gamma = 1/\tau$. Dall'analisi di Fourier si trova che il pacchetto emesso contiene frequenze ω con ampiezza: $a(\omega) = \text{const}/(\omega - \omega_0 - \iota\gamma)$.
- Quindi non c'è solo la frequenza ω_o, ma tutto un pacchetto di frequenze, con intensità spettrale:

  $$|a(\omega)|^2 = \text{const}' \,/\, |\omega - \omega_0 - i\gamma|^2 = \text{const}' \,/\, [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]$$
- Se adesso uso $E = \hbar\,\omega$, ho una relazione per le componenti spettrali dell'energia

  $$|a(E)|^2 = \text{const}'' \,/\, [(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4]$$

  dove ho definito larghezza naturale del sistema come $\Gamma = \hbar/\tau$.
- Il sistema emette quanti di radiazione in un **intorno** di E_0 di ampiezza $\Delta E = \Gamma = \hbar/\tau$.
- Possiamo ritornare alla (1)notando che un sistema instabile può essere osservato per tempi Δt dell'ordine della sua vita media, $\Delta t \approx \tau$, e quindi stabilire una relazione fra l'indeterminazione in energia $\Delta E = \hbar/\tau$ e il tempo di misura Δt : $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$.

Misure di vite medie

- La legge di evoluzione collega il numero di decadimenti ΔN in un intervallo Δt con la popolazione iniziale N_0 e con la velocita'di decadimento $\lambda=1/\tau$:

$$\Delta N = \Delta t\, \lambda\, N_0 \exp(-\lambda t)$$

- In scala logaritmica si ha una retta in t, il cui coefficiente angolare determina λ ,anche senza conoscere N_0 e Δt.

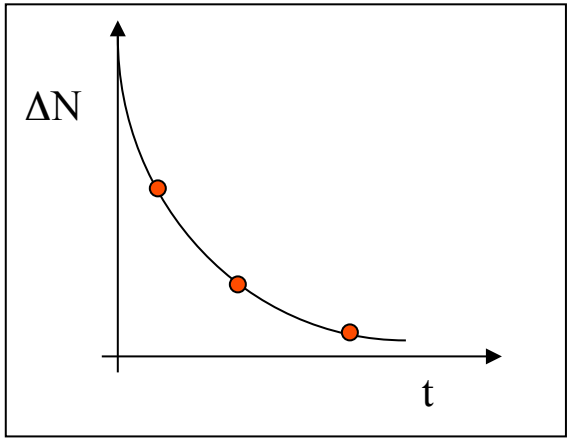
$$\ln \Delta N = \ln (\Delta t\, \lambda\, N_0) - \lambda\tau = A - \lambda\, \tau.$$

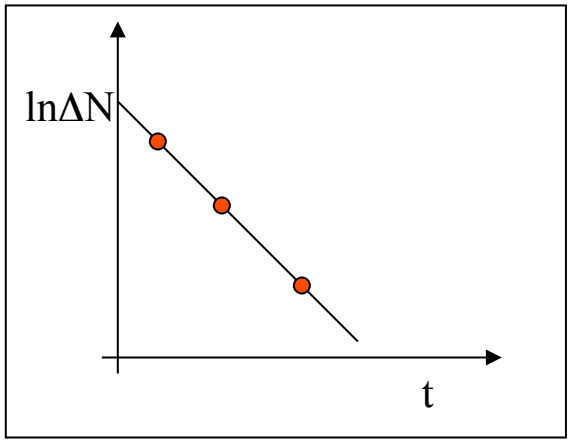
- Se la vita media è lunga rispetto ai tempi di misura, $N(t) \cong N_0$ e quindi se si misura ΔN e si conosce N_0 si ricava λ da

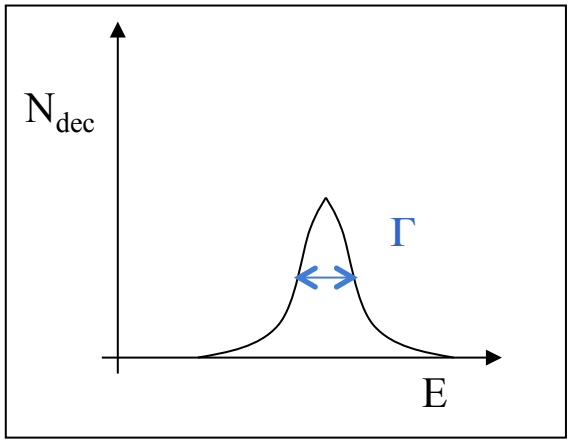
$$\Delta N = \lambda\, \Delta t\, N_0.$$

- Se la vita media è breve rispetto ai tempi di misura, si studia la distribuzione degli eventi di decadimento N_{dec} in funzione dell'energia, si determina la larghezza Γ da cui:

$$\lambda = \Gamma/\hbar$$





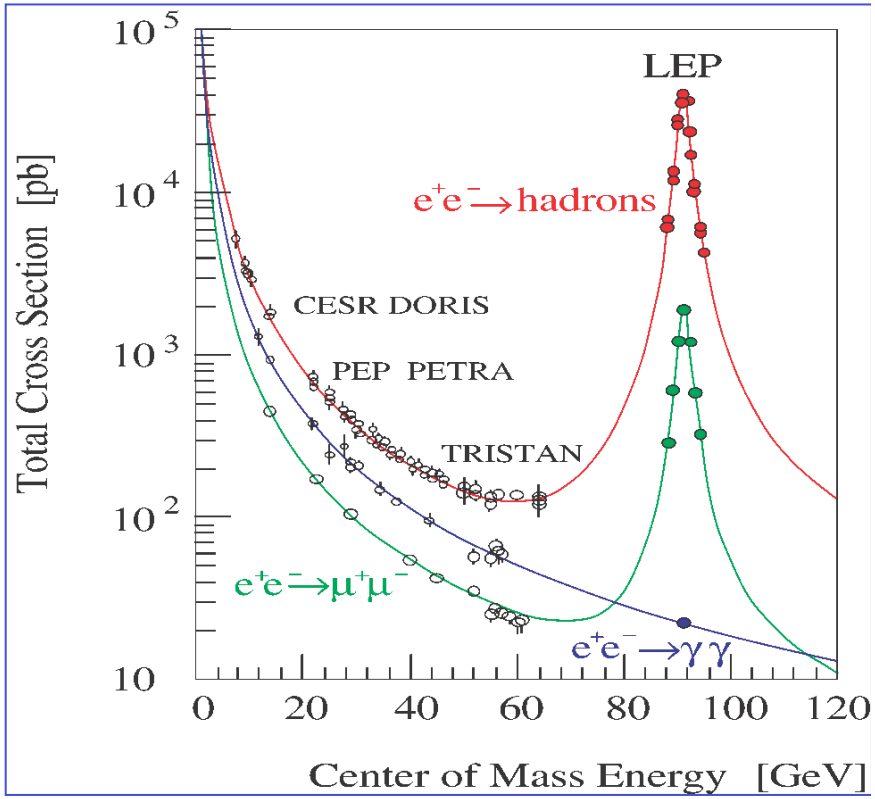


Gli intervalli di vite medie misurate

- Il decadimento più lento finora osservato* è $^{209}Bi \rightarrow ^{205}Th+\alpha$, con $t_{1/2}=(1.9\pm0.2)\ 10^{19}$anni, ottenuto registrando $N_\alpha=128$ particelle α in $\Delta t= 5$ giorni da un campione contenente M=93g di Bismuto ($m \cong 200m_p$).
- Ci si rende conto del valore trovato di $t_{1/2}$ osservando che :

$$\tau= N_o\ \Delta t/ N_\alpha = (M/m)\ \Delta t / N_\alpha \cong 10^{27}s$$

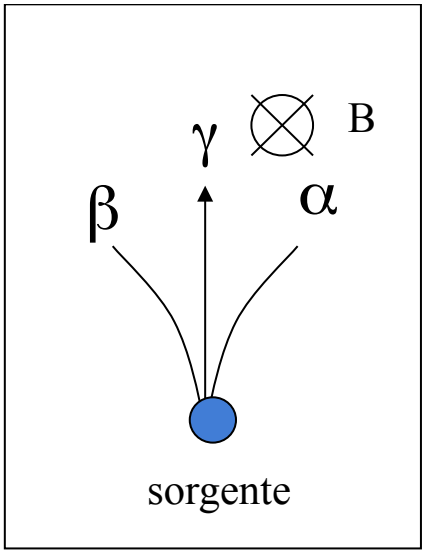
- Inoltre, le fluttuazioni statistiche su N_α sono dell'ordine $\delta N_\alpha =\sqrt{N_\alpha}$, per cui l'errore relativo su τ (o su $t_{1/2}$) è $\delta\tau/\tau= \delta N_\alpha / N_\alpha \cong 10\%$
- La vita media più breve misurata è quella della Z_o, uno dei mediatori delle interazioni deboli scoperto da C. Rubbia. La misura più precisa è stata effettuate al Lep**, $\Gamma= 2.4952(26)$ GeV, da cui $\tau = 2.2\ 10^{-25}$ s.
- E' un risultato importante, perché coerente con il modello standard (tre famiglie di leptoni e di quarks) ed esclude ulteriori famiglie.



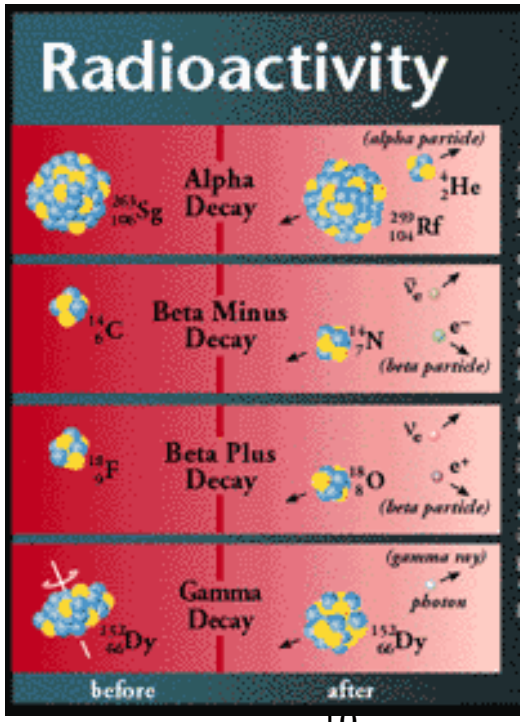
*Il risultato, un sottoprodotto di una ricerca di materia oscura, è pubblicato su Nature 422 (2003) 876, cercare Noel Coron su Web

** Vedi WWW.Cern.Ch

Decadimenti alfa, beta e gamma

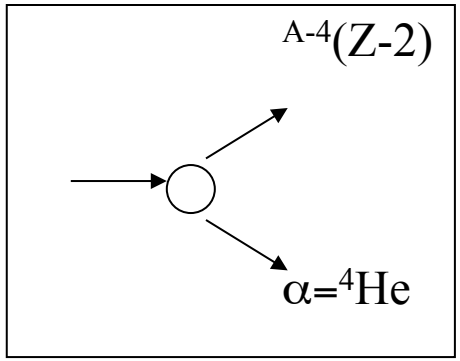


- Alla fine dell'Ottocento, con la scoperta della radioattività naturale, si scoprirono tre tipi di decadimenti dei nuclei, caratterizzati dal modo in cui la radiazione veniva deflessa da un campo magnetico:
  - Decadimenti α: la radiazione prodotta veniva deflessa come una carica positiva. Oggi sappiamo che sono nuclei di ^{4}He, spesso ancora indicato col simbolo α.
  - Decadimenti β: la radiazione veniva deflessa come una carica negativa. Oggi sappiamo che la radiazione osservata sono elettroni, cui ancora è rimasto il nome di raggi β.
  - Decadimenti γ: venivano così chiamati quelli in cui la radiazione non veniva deflessa dal campo e.m. Oggi sappiamo che sono fotoni, cui è rimasto associato nella nomenclatura il termine/simbolo γ



- Nelle prossime pagine studieremo in qualche dettaglio i decadimenti α, β e γ.

Decadimenti α: Introduzione



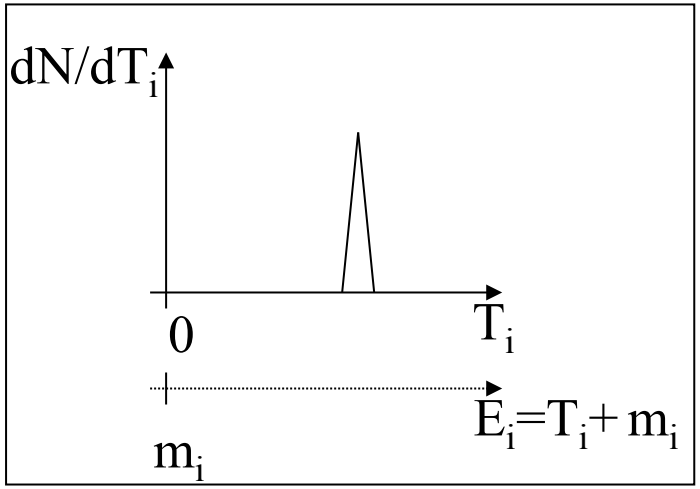
- Il processo: $^{A}Z \rightarrow {}^{A-4}(Z-2) + {}^4He$ costituisce il modo principale di decadimento di nuclei pesanti*.
- Avviene per quei nuclei in cui:

$$Q = M_A - M_{A-4} - M_\alpha > 0$$

- Trattandosi di un decadimento a due corpi, l'energia della particella α (= ^4He) è fissata, in termini delle masse degli altri due nuclei.
- Poiché il nucleo che accompagna la particella α è molto più pesante, ho con buona approssimazione:

$$T_\alpha = M_A - M_{A-4} - M_\alpha$$

- Le energie cinetiche dell' α sono dell'ordine di qualche MeV.
- Ne segue che è lecito usare, con buona approssimazione, la cinematica classica, cioè per ciascun nucleo coinvolto: $T = p^2/2m$



* Notazioni:Per individuare un nucleo occorre dare Z ed A=Z+N; dare il simbolo chimico dell'elemento corrisponde a fissare Z, ma non determina A;così ^3He e ^4He denotano due isotopi con Z=2 e diverso numero di neutroni.

Decadimenti α: perché avvengono?

- L'emissione α è un effetto della repulsione Coulombiana
- Al crescere di Z la repulsione coulombiana cresce come Z^2, più velocemente dell'energia di interazione nucleare (proporzionale ad A)

Vengono emesse proprio le particelle α

- Perché hanno grande energia di legame, dunque piccola massa, dunque un bilancio energetico positivo rispetto ad altri nuclei leggeri, ad esempio per ^{232}U:

partic. emessa	n	^1H	^2H	^3H	^3He	^4He	^5He	^6He	^6Li	^7Li
Q-Value (MeV)	-7,26	-6.12	-10.70	-10.24	-9.92	+5.41	-2.59	-6.19	-3.79	-1.94

- Perché nuclei più pesanti sono sfavoriti nei processi in cui è importante l'effetto tunnel

La condizione per avere decadimento α del tipo $^{A}Z \rightarrow {}^{A-4}(Z-2) + {}^4He$ è:

$$Q = m[^{A}Z] - m[^{A-4}(Z-2)] + m[^4He] > 0$$

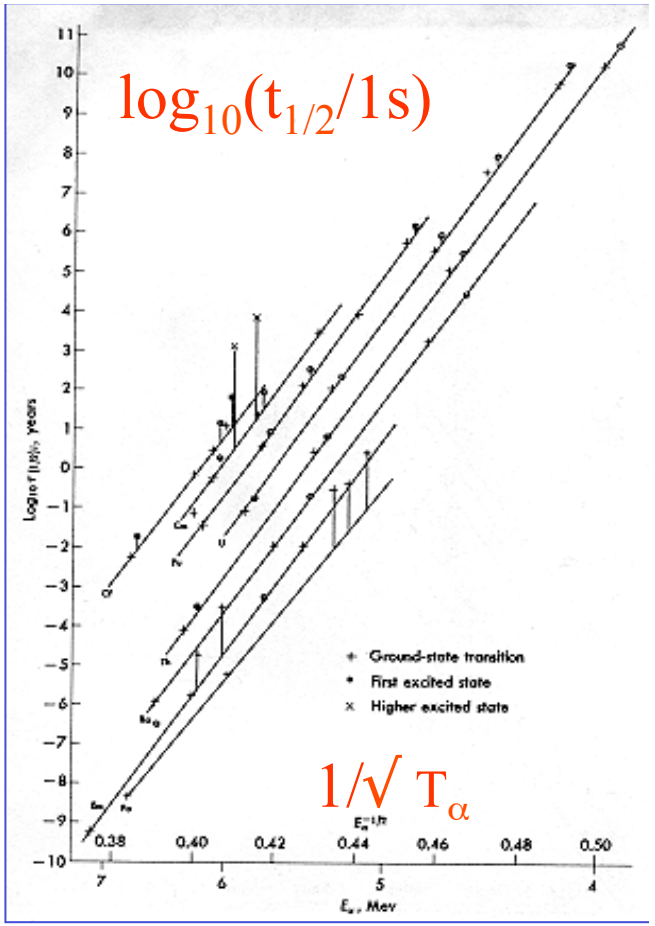
$$\rightarrow E_b[^4He] > E_b[^{A}Z] - E_b[^{A-4}(Z-2)] \sim 4\,\Delta E_b / \Delta A$$

$$\sim 4\, dE_b/dA = 4\,(A\, d\varepsilon/dA + \varepsilon)$$

Numericamente: $\varepsilon \sim 8$MeV, $d\varepsilon/dA \sim -7\ 10^{-3}$ MeV, $E_b[^4He] \sim 28$MeV

$$\rightarrow \mathbf{A > 10^2 \times 4 / 2.8 \sim 150}$$

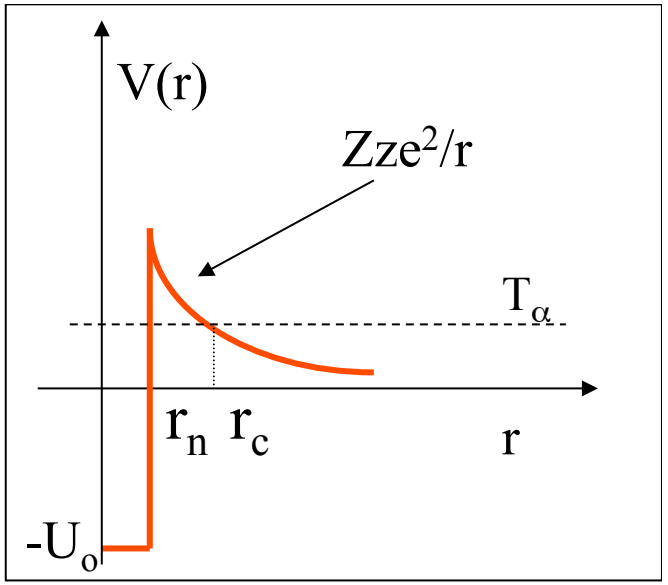
Decadimenti α: andamento delle vite medie



- Esistono nuclei i cui tempi di dimezzamento sono confrontabili o maggiori dell'età della terra (t_{terra}=4.5 10^9 anni):
  $t_{1/2}(^{232}Th)$= 15 10^9 anni
  $t_{1/2}(^{238}U)$= 4.5 10^9 anni
  $t_{1/2}(^{235}U)$= 7.1 10^8 anni
- Questi nuclei, prodotti nelle esplosioni di supernove antecedenti la formazione del sistema solare, sono ancora sulla terra e costituiscono, assieme al ^{40}K, la sorgente della radioattività naturale.
- Si osserva che i tempi di decadimento dei processi α dipendono fortemente dall'energia cinetica dell'α.
- Ad es.* $t_{½}(^{232}Th)$= 4.4 10^{17}s con T_α=4.08MeV mentre $t_{1/2}(^{222}Th)$= 2.8 10^{-3}s e T_α= 8.13MeV, quindi a un fattore 2 in T_α corrispondono 20 ordini di grandezza in $t_{½}$.
- La legge di Geiger-Nuttal, **$\log t_{½} = a + bT_\alpha^{-1/2}$** ,fornisce una parametrizzazione dei dati valida su molti ordini di grandezza.
- L' interpretazione della legge di Geiger-Nuttall, in termini di effetto tunnel, dovuta a Gamow e Condon, è uno degli importanti successi della meccanica quantistica.

- *E'utile ricordare che 1 anno= 3.15 10^7s

I decadimenti α e l'effetto tunnel



- Possiamo interpretare il moto della particella α (carica *z*) nel campo del resto del nucleo (carica Z) in termini di un potenziale con le seguenti caratteristiche:

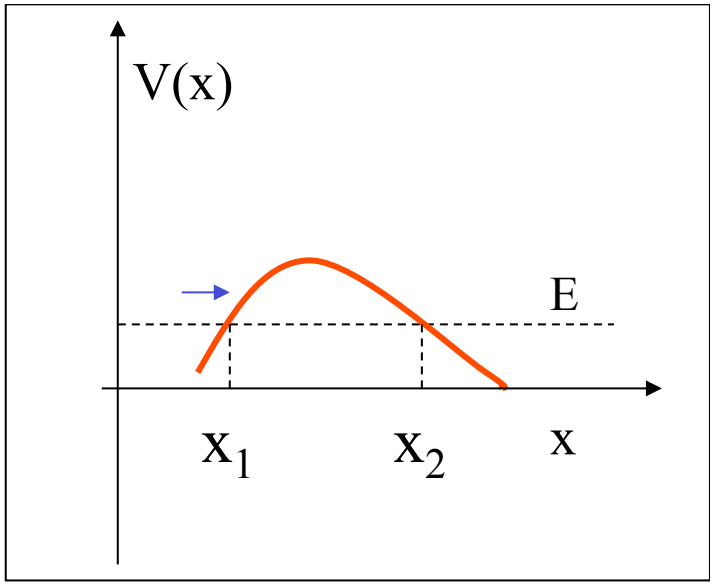
1) per $r < r_{nuc}$,una buca attrattiva, dovuta alle interazioni forti, nella quale la particella α effettua un moto oscillante.
2) per $r>r_{nuc}$, un potenziale che descriva la repulsione Coulombiana $V= Zze^2/r$.

- L'energia totale della particella α (T_α) è inferiore all'altezza della barriera ($V_{max}= Zze^2/r_n \approx ZzMeV>>T_\alpha$).
- Classicamente, la particella è confinata entro r_n e può uscirne solo per effetto tunnel.
- La velocità di decadimento λ è data dal prodotto dalla frequenza degli urti contro la barriera (ν) per la probabilità di attraversare la barriera P:

$$\lambda=\nu P.$$

- Per calcolare ν, osservo che all'interno della buca ho un moto libero con energia cinetica $T'=T_\alpha+U_o$ con $U_o >> T_\alpha$, dunque la velocità è $v_o\approx(2U_o/m_\alpha)^{1/2}$ e la frequenza degli urti con la parete è $\nu \approx v_o/ r_{nuc}$
- Questo termine non dipende da T_α nell'approssimazione $U_o >> T_\alpha$.
  Per $U_o \approx 30MeV$ e $r_{nu} \approx 10$ fm ho
  $v \approx 10^9 cm/s$ e $\nu \approx 10^{21}/s$.
- È il piccolo valore della prob. di attraversamento P che rende conto dei tempi di decadimento macroscopici

Calcolo della probabilità di attraversamento di una barriera (1)



- In un problema unidimensionale, il coefficiente di penetrazione P può essere calcolato per un arbitraria forma del potenziale V(x) nell'approssimazione semiclassica, detta WKB.
- Consideriamo il moto di una particella di massa m ed energia T , incidente da sinistra sulla barriera, i cui punti classici di inversione, cioè le soluzioni di V(X)=E, siano x_1 e x_2. Definisco il coefficiente di penetrazione come:

$$P = \frac{|\Psi(x_2)|^2}{|\Psi(x_1)|^2}$$

- Posto Ψ(x) =exp σ(x) dall'equazione di Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + V\Psi = E\Psi$$

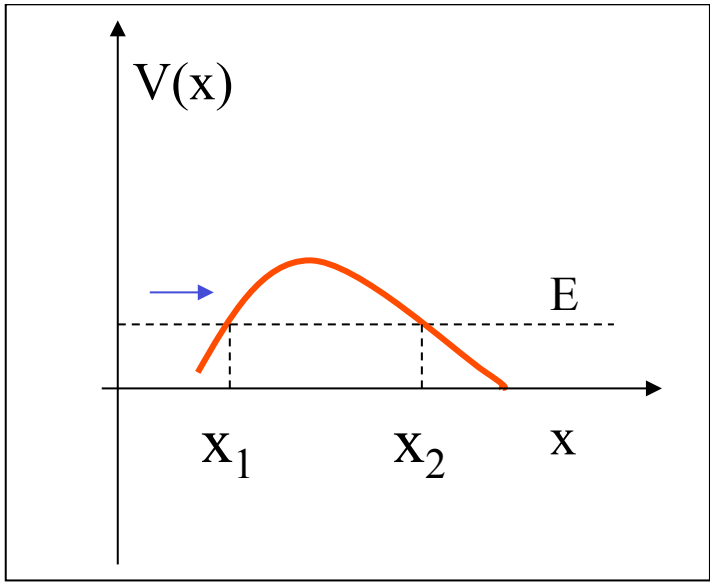
si ricava un'equazione per σ:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\sigma'^2 + \sigma'') = V - E$$

- L'approssimazione (corrispondente a supporre che il potenziale vari lentamente) consiste nel trascurare σ'' e quindi risolvere:

$$\sigma'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)$$

Calcolo della probabilità di attraversamento di una barriera(2)



- Studiamo il moto all'interno della barriera. Per $x_1<x<x_2$ si ha V-E>0, e quindi, trascurando il termine σ'':

  $$\sigma' = \pm\, [2m(V(x)-E)]^{1/2}/\hbar$$

  da cui si ricava

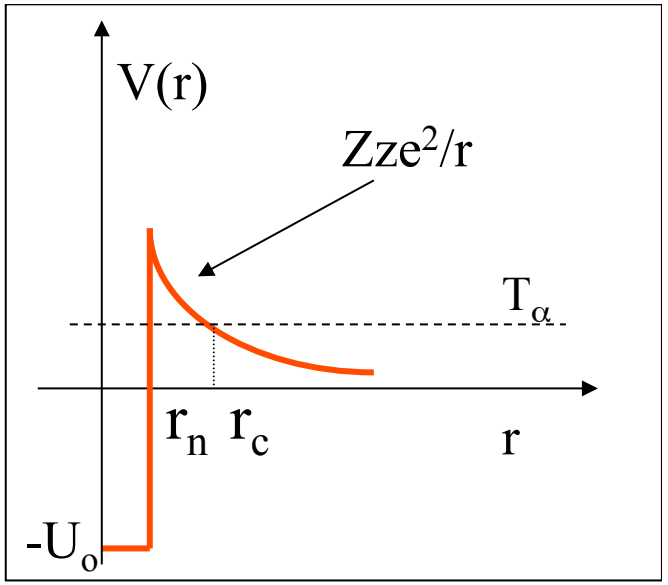
  (1) $\sigma(x) = \pm\int_a^x dx'[2m(V(x')-E)]^{1/2}/\hbar$
- Delle due soluzioni, quella fisicamente accettabile decresce col progredire all'interno della barriera, dunque si sceglie (-)
- A questo punto posso riscrivere la (1) come:

  $$\sigma(x) = A - \int_{x1}^x dx'\{[2m(V(x')-E)]^{1/2}/\hbar\}$$
- Si determina la costante di integrazione A dalla condizione di continuità in x_1:

  $$\Psi(x) = \Psi(x_1)\exp\{-\int_{x1}^x dx'[2m(V(x')-E)]^{1/2}/\hbar\}$$
- Questo permette il calcolo della $\Psi(x_2)$ e quindi del coefficiente di penetrazione:

  $$\mathbf{P = |\Psi(x_2)|^2/|\Psi(x_1)|^2 = \exp\{-(2/\hbar)*\int_{x1}^{x2} dx[2m(V(x)-E)]^{1/2}\}}$$
- Questo è il risultato cercato.
- Evidentemente l'attraversamento della barriera è un effetto quantistico, la cui probabilità è esponenzialmente piccola quando l'integrale di azione è grande rispetto ad $\hbar$.

Calcolo della probabilità di tunnel della particella α



- Il moto radiale della particella α può essere trattato come un moto unidimensionale, da cui :

  $$P = \exp\{-2\int_{rn}^{rc} dr\, [2m_\alpha (V(r)- T_\alpha)]^{1/2} /\hbar\}=$$
  $$= \exp\{-2\int_{rn}^{rc} dr\, [2m_\alpha (V(r)- V(r_c)]^{1/2} /\hbar\}.$$

- Esplicitando $V= Zze^2/r$ e trasformando la variabile di integrazione in $x=r/r_c$ si ha:
  $P=\exp \{-2 (2m_\alpha Zze^2 r_c/ \hbar^2)^{1/2} \int_{rn/rc}^{1} dx\, [1/x-1]^{1/2} \}$.
- Osservando che che $r_n \ll r_c$ si può approssimare l'estremo inferiore con 0.

$$P = \exp\{-2\int_{x1}^{x2} dx[2m(V(x)-E)]^{1/2} /\hbar\}$$

- Poiché $\int_0^1 dx\, [1/x-1]^{1/2} =\pi/2$ si trova $P= \exp \{-2 (2m_\alpha Zze^2 r_c/ \hbar^2)^{1/2} \pi/2 \}$ da cui:

  $$\boxed{P=\exp\{-2\pi\, v_o/v_\alpha\}}$$

  dove:
  - $v_o= Zze^2/ \hbar$ è la scala di velocità del problema coulombiano con cariche Z e z
  - $v_\alpha =(2T_\alpha/m_a)^{1/2}$ è la velocità finale della particella α
- Da osservare che P dipende esponenzialmente da $1/ v_\alpha$ e dunque esponenzialmente da $1/\sqrt{T_\alpha}$.
- Ponendo $\lambda=\nu P$, usando la (1) e passando al logaritmo, si trova la legge di Geiger Nuttal, ($\ln\lambda=\alpha-\beta /\sqrt{T_\alpha}$) e si determinano i coefficienti ($\alpha=\ln\nu$, $\beta=2\pi zZe^2M/2^{1/2}/ \hbar$) in accordo con i dati sperimentali.

Decadimenti beta: gli spettri

- Nel decadimento β si osserva una trasformazione del tipo :

$$^{A}Z \rightarrow {}^{A}(Z+1) + e^{-} + \ldots..$$

- Lo spettro degli elettroni prodotti nel decadimento è continuo e l' energia cinetica si estende -nei limiti dell'accuratezza sperimentale - fino ad un valore dell'energia cinetica:

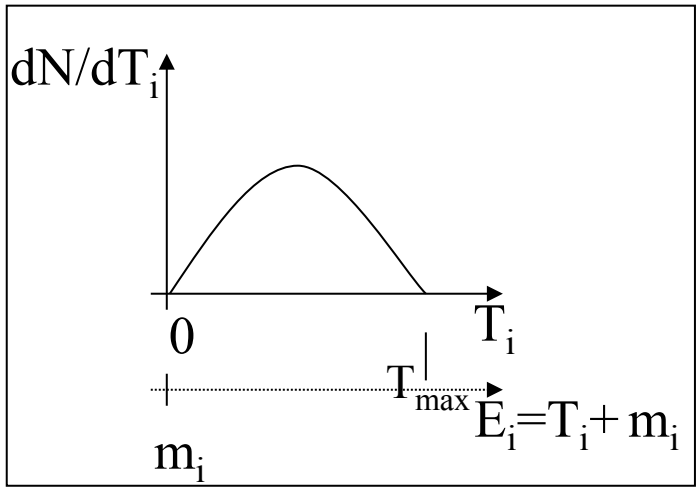
$$T_{max} = M_i - M_f - m_e$$

- La conservazione dell'energia richiede che il decadimento sia accompagnato da una particella, con massa nulla, o comunque minore della risoluzione energetica nell'esperimento.
- La conservazione del momento angolare richiede che questa particella porti spin semintero.

esempio

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{14}_{6}C & \rightarrow & {}^{14}_{7}N & + & e^{-} & + & \bar{\nu}_e \\ \mathrm{J}=0 & \rightarrow & \mathrm{J}=1 & & \mathrm{J}=1/2 & & \mathrm{J}=1/2 \end{array}$$

- Per la conservazione della carica elettrica deve essere neutra.



- Poiché non cede energia al rivelatore deve essere penetrante, cioè avere interazioni più deboli di e, γ e nuclei che verrebbero comunque rivelati.
- Chiamiamo questa particella anti-ν_e e scriviamo:

$$^{Z}A \rightarrow {}^{Z+1}A + e^{-} + \text{anti-}\ \nu_e.$$

- Il neutrino, ipotizzato da Pauli nel 1930, descritto quantitativamente da Fermi nel 1932, venne per la prima volta rivelato da Reines e Cowan nel 1950.

Decadimenti β: le vite medie

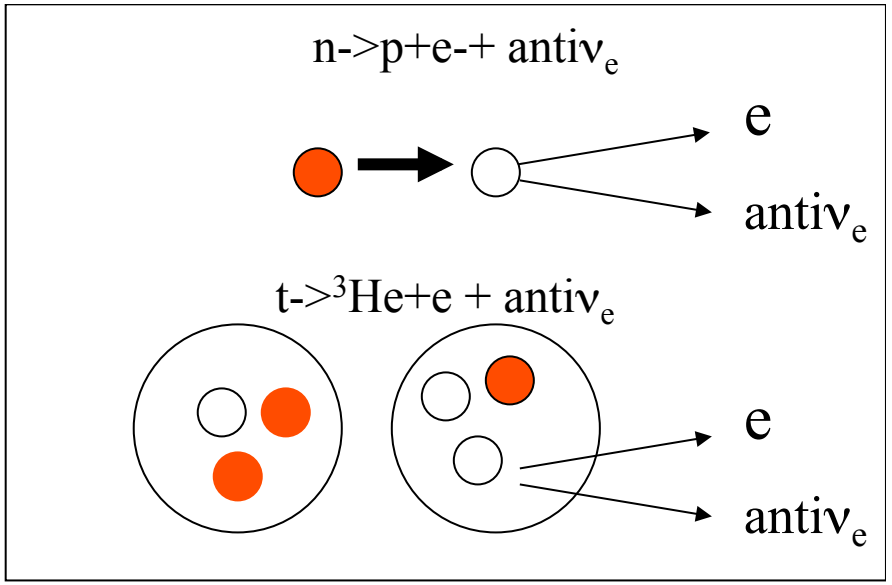
- I nuclei che decadono β hanno vite medie fra 10^{-3} e 10^{23} s. Sono tempi ben più lunghi di quelli di un processo di decadimento e.m. e dunque associati all' interazione debole.
- Il più semplice decadimento β e'quello del neutrone libero :

  $n \to p + e^- + \text{anti}\nu_e$

  Il processo è possibile poiché

  $Q = m_n - m_p - m_e = 0.78$ MeV > 0.
- La vita media del neutrone è :

  $$\tau_n = 886 \pm 1 \text{s}$$
- Il decadimento β di un nucleo è sostanzialmente lo stesso processo, ma il suo andamento è determinato dalle energie di legame dei *p* e *n* nel nucleo, che determinano il Q valore della reazione.



- Il *n* è stabile nel *d=(p,n)* , poiche' :

  $Q = m_d - 2m_p - m_e < 0$.
- Nel trizio, t=(pnn), si ha

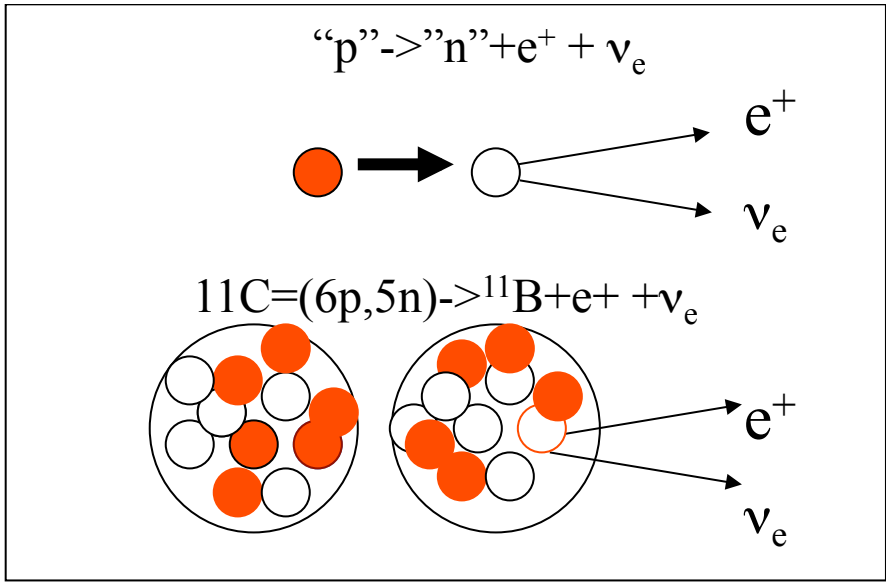
  $Q = m_t - m_{3He} - m_e = 18.6$keV

  e il nucleo è instabile:

  $t \to {}^3He + e + \text{anti}\nu_e$

  con $\tau_t = 17.9$ anni.

Decadimenti β^+

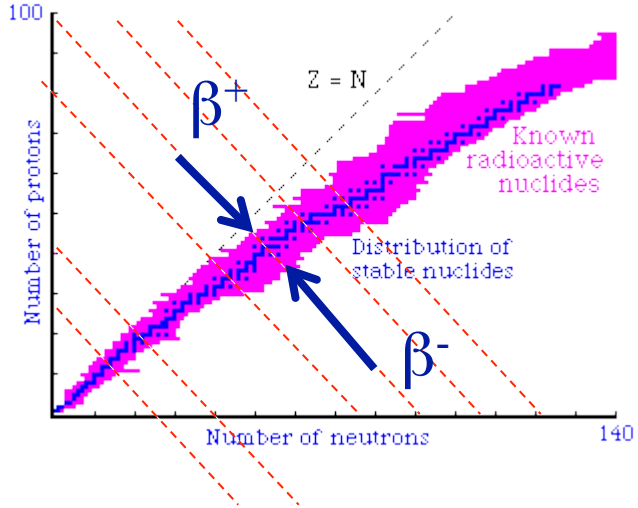


- Oltre ai decadimenti β , si osserva che alcuni nuclei decadono emettendo positroni (β+):
  ${}^{A}Z \rightarrow {}^{A}(Z-1) + e^+ + \nu_e$.
- Questo succede, ad esempio per ${}^{15}O$ ($t_{1/2}$=2m), ${}^{11}C$ ($t_{1/2}$=20m), ${}^{18}C$($t_{1/2}$=110m) , gli isotopi più usati per la PET.
- Chiamiamo ν_e la particella emessa assieme al positrone (vedremo poi che è distinguibile dall'antineutrino)
- I processi β^+ sono analoghi ai decadimenti studiati precedentemente (β^-), per cinematica e vite medie. Sostanzialmente corrispondono a un decadimento del protone nel nucleo: $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.
- Il protone libero è stabile, in quanto la reazione: $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ è vietata dalla conservazione dell'energia ($m_p < m_n$), ma se si è in un nucleo, può avvenire che il neutrone sia più legato del protone ($Q = m_Z - m_{Z-1} - m_e > 0$), e quindi che la reazione avvenga.

Cattura elettronica

- In tutti i nuclei che decadono β^+
  (1) $^{A}Z \rightarrow {}^{A}(Z-1) + e^+ + \nu_e$.
  si osserva anche il decadimento mediante un processo di cattura elettronica (ε)
  (2) $e^- + {}^{A}Z \rightarrow {}^{A}(Z-1) + \nu_e$,
  dove l'elettrone viene catturato dai gusci elettronici più interni dell'atomo
- È chiaro che se energeticamente è permessa (1) lo è anche (2). Infatti
  $Q_2 = m_z + m_e - m_{z-1} = m_z - m_e - m_{z-1} + 2m_e = Q_1 + 2m_e$. Quindi se $Q_1>0$ allora anche $Q_2>0$.
- Da notare che può essere $Q_1<0$ e $Q_2>0$, cioè $-2m_e<Q_1<0$ In questo caso non può aversi decadimento β^+ ma solo cattura elettronica. In altri termini il nucleo, se non avesse elettroni attorno, sarebbe stabile.
- È questo il caso del ^{7}Be, la cui vita media dipende dunque in maniera cruciale dalla densità elettronica sul nucleo, ed è quindi sensibile al tipo di legame chimico: un esempio di come la fisica atomica, che pure tratta energie molto più basse della scala nucleare, possa comunque influenzare la fisica nucleare.
- Da notare che, a differenza di β^- e β^+, l'energia del neutrino prodotto nella cattura è determinata.

Decadimenti beta e valle di stabilità



- Il decadimento beta rappresenta un modo conveniente per raggiungere la valle di stabilità
- Per A costante, la massa nucleare si muove lungo una parabola:

$$M(Z,A) = N\, m_n + Z\, m_p - E_b$$

$$E_b(A,Z) = aA - bA^{2/3} - s(N-Z)^2 / A - dZ^2 / A^{1/3} + \delta A^{-1/2}$$

$$M(Z,A) = \alpha\, A + \beta\, Z + \gamma\, Z^2 - \delta A^{-1/2}$$

δ = energia di pairing: nuclei con numeri pari di protoni e neutroni tendono ad essere più stabili di quelli con numeri dispari

Z	N	n° nuclei stabili	
p	p	166	+
p	d	55	0
d	p	51	0
d	d	6	−

δ=11.2 MeV

- A causa del termine di pairing, per A dispari c'è una sola parabola, mentre per A pari ce ne sono due, distanziate tra loro di $2\delta A^{-1/2}$
- Il minimo delle parabole (e quindi il nucleo stabile) si ha per $Z=-\beta/2\gamma$

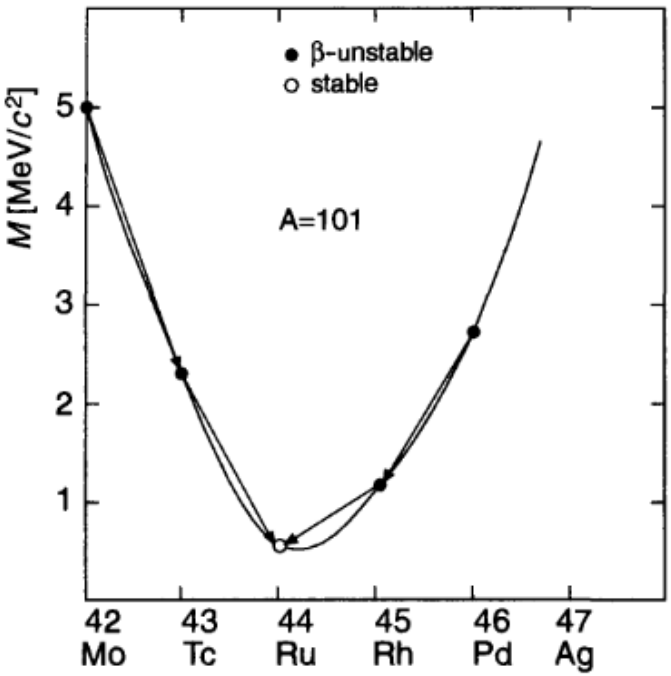
Parabole isobare

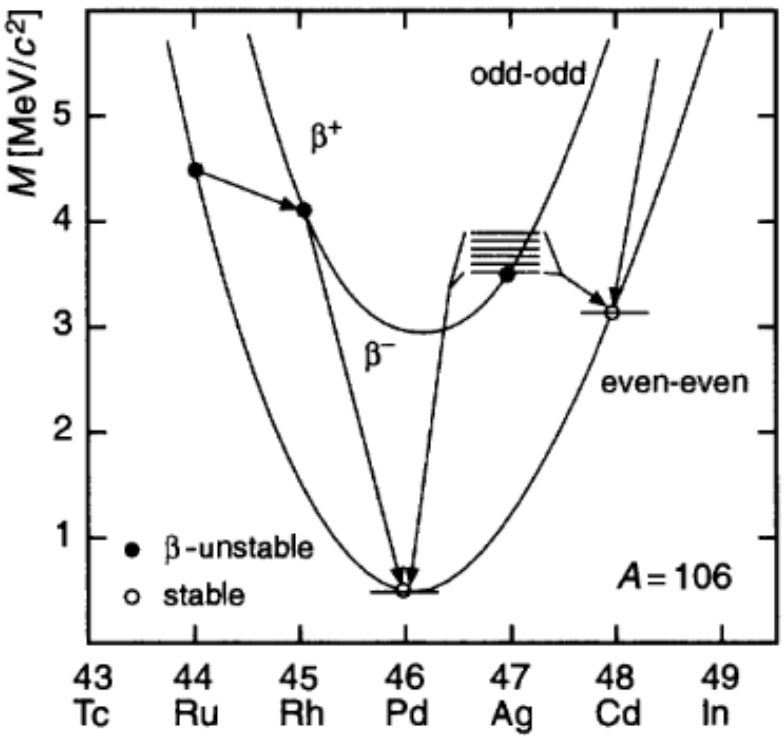
- Per A=101, il minimo è sul ^{101}Ru, che è il solo isobaro stabile
- Isobari con più neutroni (101Mo, 101Tc) decadono b-; isobari con più protoni decadono b+

- Per nuclei con A pari, possono esserci più di un isobaro stabile
- Ad esempio, per A=106 sono stabili sia il palladio che il cadmio (la probabilità di decadimento

$$^{106}_{48}\mathrm{Cd} \rightarrow {}^{106}_{46}\mathrm{Pd} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}}\,.$$

è estremamente bassa)





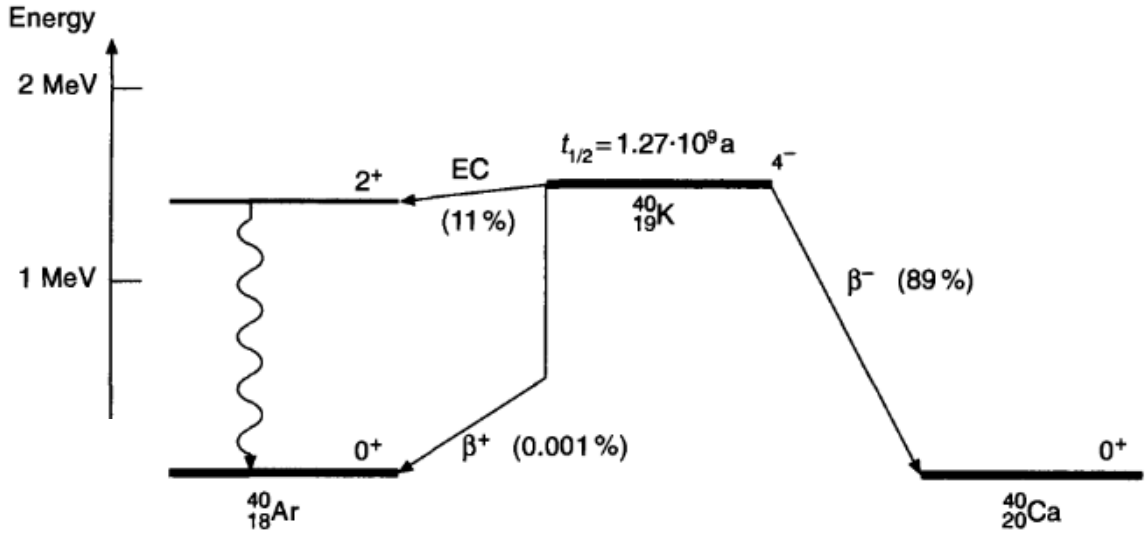
Probabilità di diramazione e larghezze parziali

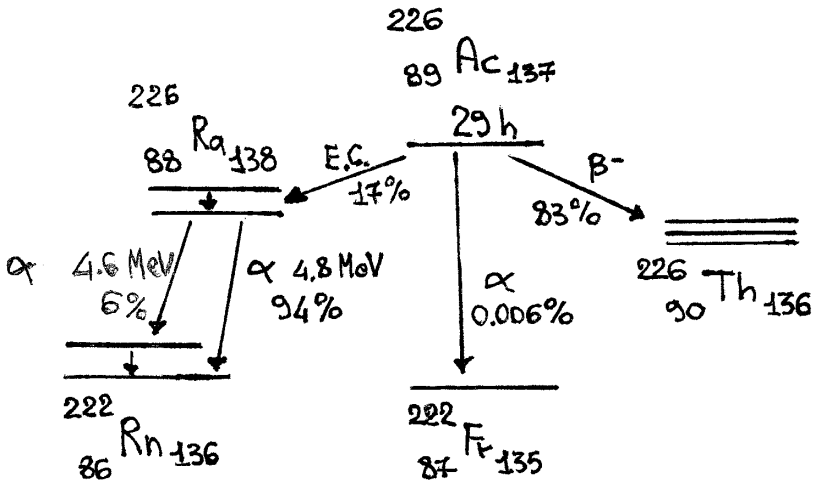
- Spesso, un sistema ha diversi modi (detti canali) di decadimento, ad esempio $\pi^o \rightarrow \gamma + \gamma$ nel 98.8% dei casi, ma anche $\pi^o \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$ (1.1%) e $\pi^o \rightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$ (0.003%).
- Si chiama "branching ratio"(rapporto di diramazione), la frazione P_x dei decadimenti che avvengono in un determinato canale. Nel caso del π^o al canale $(\gamma + e^+ + e^-)$corrisponde B=1.1% e così per gli altri.
- Per ciascun canale di decadimento si introduce una specifica velocità di decadimento: $\lambda_X = P_x \lambda$. Evidentemente $\lambda = \Sigma_x \lambda_X$.
- Il numero di decadimenti per unità di tempo in uno specifico canale X è dato da $dN_X/dt = \lambda_X N$, dove N è il numero di particelle sopravvissute al tempo t. Questo evolve secondo la $dN/dt = -\lambda N$, quindi il numero di particelle sopravvissute al tempo t è $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ e il numero di decadimento nel canale X per unità di tempo è $dN_X/dt = \lambda_X N_0 e^{-\lambda t}$ *).
- Come alla velocità di decadimento è associata una "larghezza propria"del sistema, $\Gamma = \hbar/\tau = \hbar\lambda$ così ad ogni canale si associa una "larghezza parziale" $\Gamma_X = \hbar\lambda_X$

*Notare che, quale che sia il canale considerato, all'esponente sta sempre la velocità di decadimento totale della particella

Probabilità di diramazione e larghezze parziali

Potassio 40:





La costante di decadimento totale è:

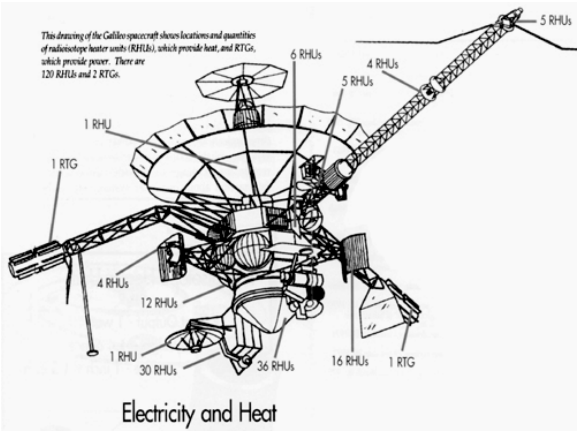
$$\lambda_{TOT} = \frac{0.693}{t_{1/2}} = 0.024\,h^{-1} = 6.6\,10^{-6}\,s^{-1}$$

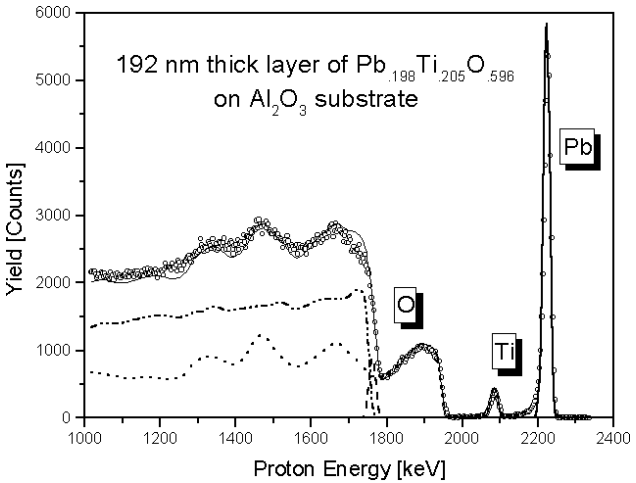
Le costanti di decadimento parziali sono:

$$\begin{cases} \lambda_\beta & = 0.83\,\lambda_{TOT} = 5.5\,10^{-6}\,s^{-1} \\ \lambda_{EC} & = 0.17\,\lambda_{TOT} = 1.1\,10^{-6}\,s^{-1} \\ \lambda_\alpha & = 6\,10^{-5}\lambda_{TOT} = 4\,10^{-10}\,s^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{1/2\ \beta} & = 35\,h \\ t_{1/2\ EC} & = 170\,h \\ t_{1/2\ \alpha} & = 55\,y \end{cases}$$

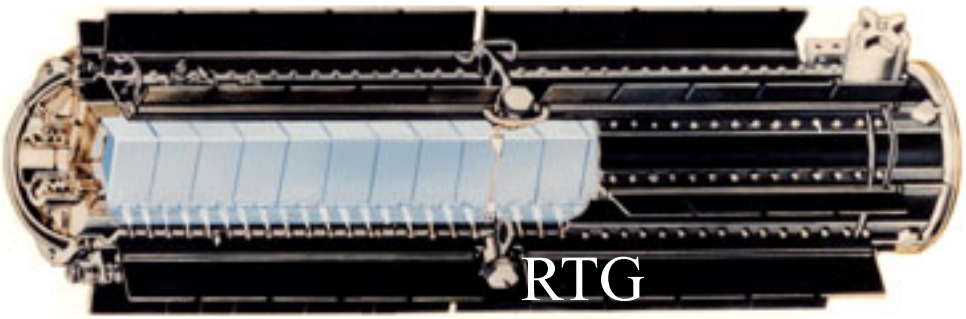
Applicazioni del decadimento alfa

- Il decadimento alfa ha una serie di importanti applicazioni, fra cui:
- Sorgente di energia:
  - satelliti, pacemakers
- Datazioni:
  - rocce terrestri, sistema solare, galassia
- Analisi di superfici (scattering Rutherford all'indietro):
  - componenti elettronici, superfici di oggetti d'arte
- Le pagine successive discutono alcune di queste applicazioni





Il decadimento alfa come sorgente di energia



- L'energia liberata in decadimenti alfa è usata per produrre calore (RHU=Radiogeinc Heat Unit) ed elettricita' (RTG=Radioisotope Thermoelectric Generator) nello spazio, in quelle missioni in cui non è sufficiente l'energia solare.
- Si usa comunemente ^{238}Pu il cui tempo di dimezzamento ($t_{1/2}$=86anni) è sufficientemente lungo per avere una potenza costante su lunghi periodi.
- Dal Q valore del decadimento, Q=5.6MeV, si può facilmente calcolare il calore P prodotto per unità di massa e di tempo.

- Il numero di decadimenti nell'unità di tempo è :

  $A = N/\tau = N_0/\tau \exp(-t/\tau) \cong N_0/\tau =$
  $= (M/m_{Pu})/\tau$

  da cui si ricava il numero di decadimenti per unità di tempo e di massa (attività):

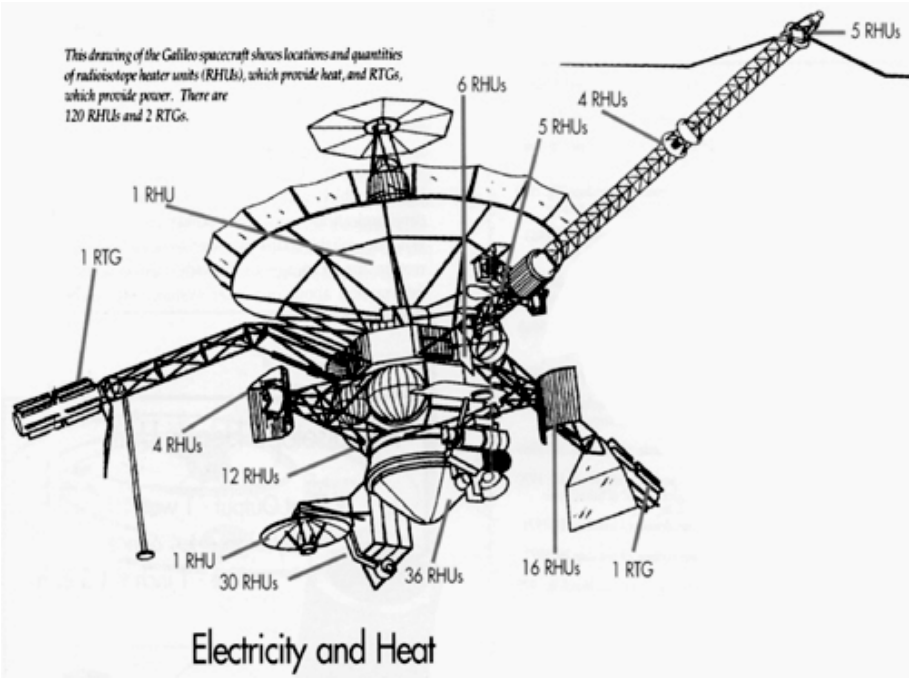
  (1) $A_s = A/M = 6\ 10^{11}$ dec/s/g
- La potenza specifica $P_s = QA_s$ è dunque:

  (2) $P_s = 0.6$ W/g
- Con masse di centinaia di grammi si ha una sorgente sufficiente per dare potenza a circuiti elettrici, stabile e con una durata confrontabile col tempo di decadimento.

Sorgenti di calore e di energia sulla sonda Galileo*

•Galileo lifted into space in October 1989 aboard the space shuttle Atlantis. Its mission involves a scheduled eight-year, deep-space voyage to the solar system's largest planet, Jupiter, and its four major moons.

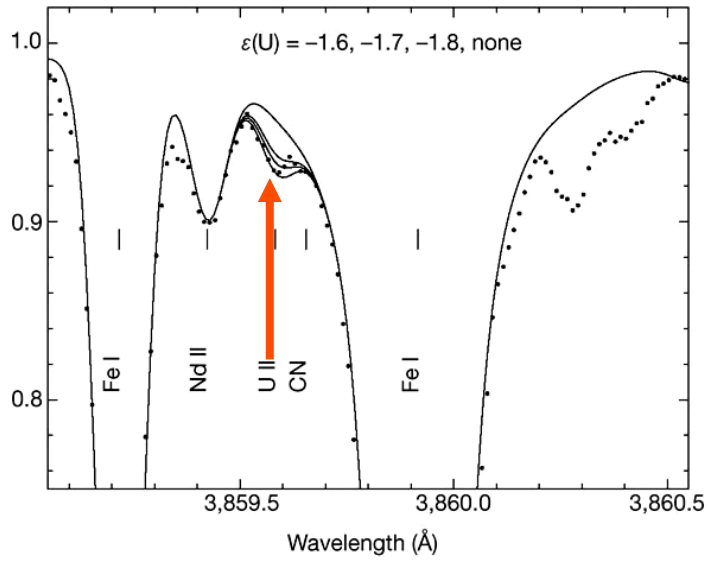
•The spacecraft will go into orbit around Jupiter and conduct detailed investigation of this system. Scientists are intensely interested in Jupiter. Unlike Earth and other planets, Jupiter has kept much of its original composition and can enhance our understanding of the solar system's origins.



- Two RTGs provide electrical power to drive the Galileo spacecraft and its instruments. Each RTG produces about 285 watts of electricity at the beginning of the mission. One hundred and twenty small RHUs protect the craft's sensitive instruments from damage in the cold vacuum of outer space, which can reach -400 degrees Fahrenheit.
- The Galileo orbiter's two RTGs provide all the electrical energy the spacecraft requires. The heater units are small, barrel-shaped devices that contain a plutonium-238 dioxide ceramic pellet much like the fuel pellets used in RTGs. The heater units are designed and tested to contain their radioactive fuel during all normal and accident conditions. Eighty-four of these units are placed at various locations on the orbiter to heat its instruments, and 36 are located on the atmospheric probe. Each heater unit produces about 1 watt of heat -- about as much as a miniature Christmas tree bulb. But, it is enough to protect the instruments from the cold.

- *http://www.nuc.umr.edu/nuclear_facts/spacepower/spacepower.html

L'età della Galassia*



- Recentemente è stata effettuata una determinazione diretta dell' età della Galassia, misurando le abbondanze relative di ^{238}U e ^{232}Th in una stella molto antica (come testimoniato dalla carenza di elementi oltre H e He), formatasi all' inizio della Galassia.
- Un'esplosione di supernova (t=0), poco precedente alla formazione della stella, avrà prodotto l'Uranio e il Torio, le cui abbondanze sono evolute fino ad oggi (t) secondo:

$$N(Th)= N_0(Th) \exp(-\lambda_{T\eta}\, t) \qquad N(U)= N_0(U) \exp(-\lambda_U\, t)$$

da cui segue:

- $t=\{ \ln [N(U) /N(Th)]- \ln [N_0 (U) /N_0 (Th)]\}/(\lambda_U - \lambda_{T\eta})$
- Nelle esplosioni di supernovae, ^{238}U e ^{232}Th vengono prodotti con abbondanze confrontabili, quindi a t=0 : $N_0(U)/N_0(Th) \approx 1$
- Ne segue che dalla misura dell' abbondanza odierna N(U) /N(Th)=0.18 [con un errore del 14%] si può dedurre il tempo trascorso dalla formazione di questi elementi, t=15 10^9 anni (con un errore di circa 3 10^9 anni tenendo conto dell' incertezza osservativa e di quella teorica sul rapporto iniziale U/Th).
- * *Nature* **409**, 691 - 692 (2001);

Il metodo della datazione con isotopi radioattivi

- Nell' esempio precedente, per determinare l'età abbiamo supposto note le abbondanze iniziali.
- Questa ipotesi si può evitare se se si hanno ulteriori informazioni.
- Consideriamo un decadimento che trasformi un nucleo genitore (P) in un nucleo figlia (D), stabile, con una velocita' di decadimento λ :

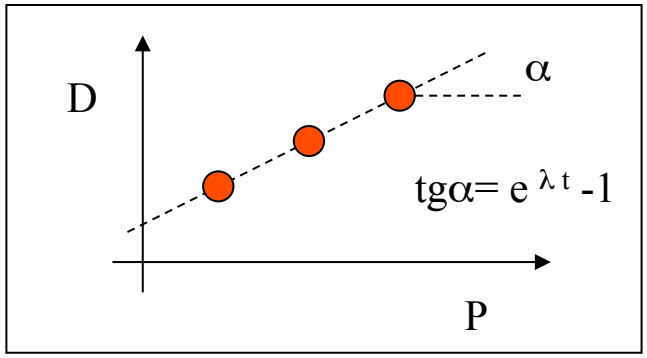
  $P \rightarrow D + X$
- Le abbondanze dei due nuclei evolveranno secondo:

  (1) $P(t)=P_o e^{-\lambda t}$

  (2) $D(t)=D_o + P_o (1- e^{-\lambda t})$

  dove P_o e D_o sono le popolazioni iniziali
  Sosti tuendo (1) in (2) trovo

  $D(t) = D_0 + P(t) (e^{\lambda t} -1)$
- Se si misura D e P in campioni diversi ma che hanno la stessa età, sarà diverso P_o, ma ci dovrà essere comunque una relazione lineare fra le due quantità, la cui pendenza determina l'età del campione.



- Da notare che:
- i) suppongo che il materiale, nella sua storia, abbia conservato D e P, cioe' il sistema sia "chiuso"
- 2)Le stesse equazioni valgono per P e D se ho una catena di decadimenti "
- $P \rightarrow D_1 + X_1$

  $D_1 \rightarrow D_2 + X_2$

  ....

  $D_n \rightarrow D + X$

  all' equilibrio secolare", cioe' dopo tempi lunghi rispetto ai tempi dei processi intermedi.

Datazioni nel sistema solare

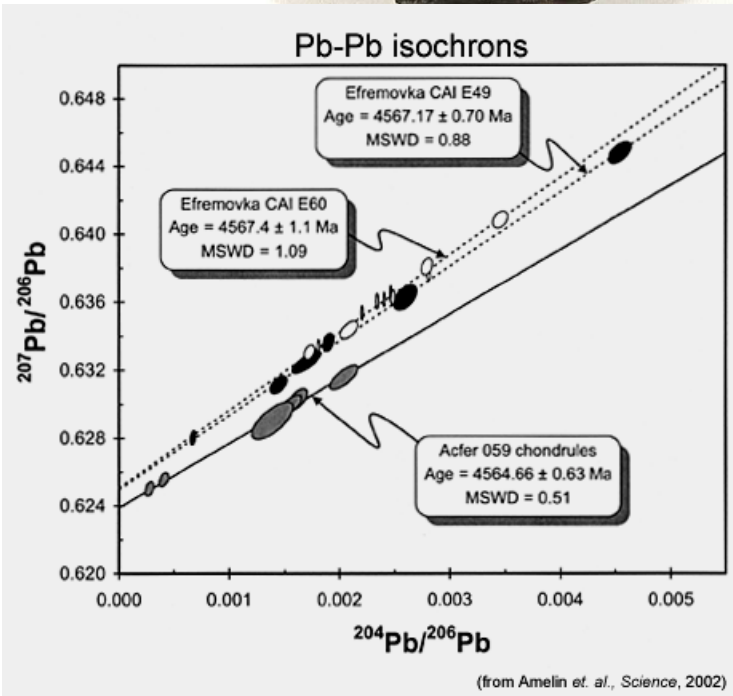
- La datazione di rocce terrestri, o del sistema solare, consiste nel determinare il tempo trascorso da quando (t=0) il materiale è condensato.
- Si misurano le abbondanze odierne dei nuclei radioattivi (es. ^{235}U, ^{238}U ^{232}Th) e/o delle loro figlie.
- Il metodo migliore è quello di confrontare isotopi dello stesso nucleo, perché – se ci sono state perdite - sono sottratti in uguale quantità dal campione*.
- Il metodo Pb-Pb consiste nello studiare le abbondanze relative di tre isotopi del piombo:

  A)^{207}Pb, proveniente da ^{235}U

  B)^{206}Pb, proveniente da ^{238}U

  C) ^{204}Pb, non radiogenico
- Si può stabilire una correlazione lineare fra le abbondanze, dalla cui pendenza si ricava l'età del campione.

- *È importante osservare che la chimica riconosce gli elementi, ma non gli isotopi, che dunque hanno avuto la stessa storia nel materiale



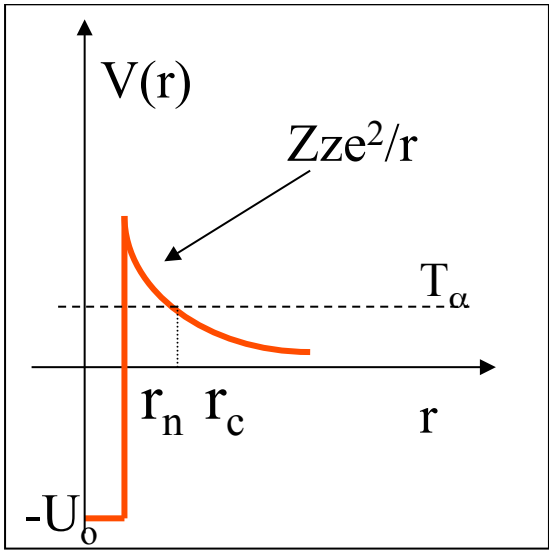
- I meteoriti più antichi hanno età di 4.57 10^9 anni
- I valori per la datazione della terra oscillano fra 4.52-4.58 10^9 anni

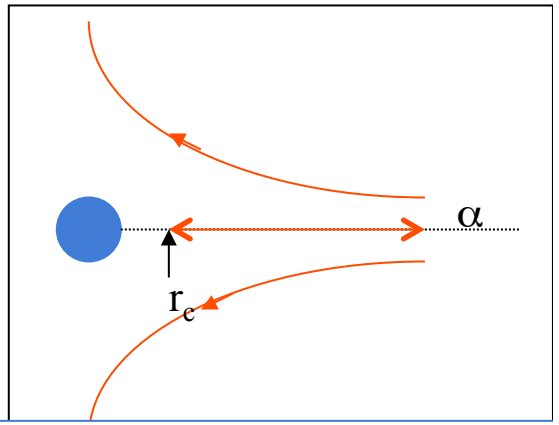
Rutherford Back Scattering

- Una importante applicazione di emettitori α consiste nell'analisi di elementi in superficie.
- Le α (massa m) emesse da una sorgente radioattiva con energia cinetica T sono deflesse da un nucleo di massa M contro cui vanno a urtare.
- Trattandosi di un urto elastico, l'energia cinetica T' delle α dopo l'urto dipende in maniera univoca dall'angolo di deviazione e dal rapporto delle masse r=m/M del nucleo. Nel caso di scattering all'indietro:

$$\Delta T = T - T' = T\, 4r/(1+r)^2.$$

- Dalla misura di ΔT si ricava r e dunque la massa del nucleo contro cui è avvenuto l'urto. Il numero dei conteggi osservati in funzione di ΔT permette di risalire alle abbondanze dei vari elementi
- È un metodo di analisi non distruttiva delle superfici, ampiamente utilizzato (materiali per l'elettronica, superfici di opere d'arte, superfici di oggetti nel sistema solare non altrimenti raggiungibili).





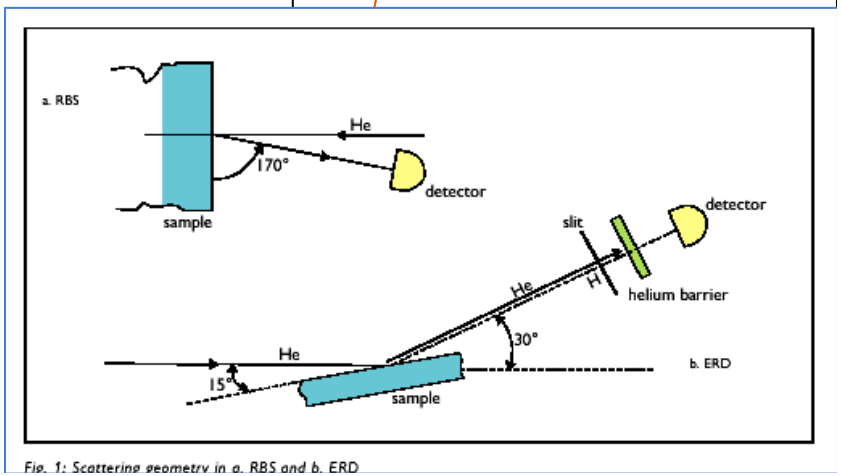
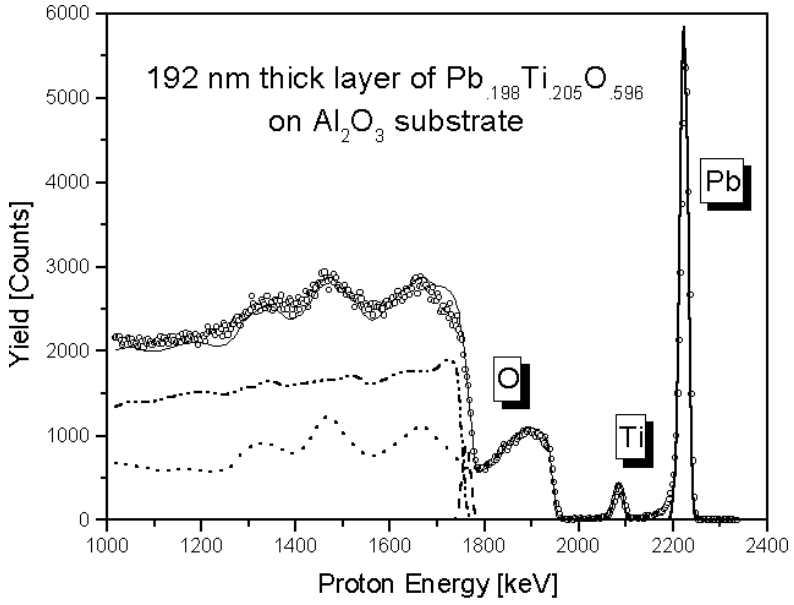


Fig. 1: Scattering geometry in a. RBS and b. ERD

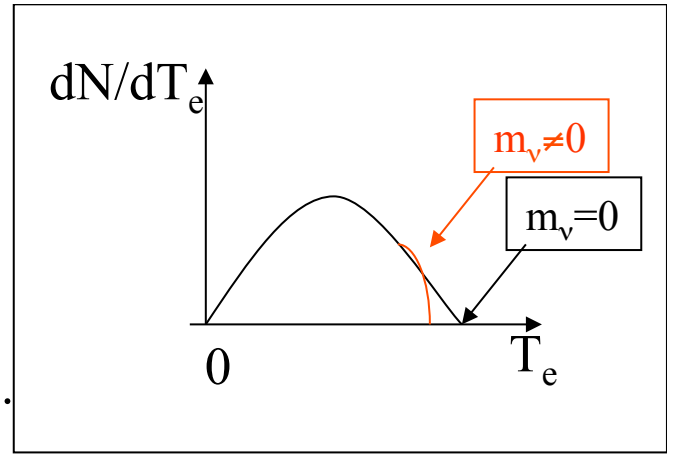
Applicazioni del Rutherford Back Scattering

•Rutherford back-scattering technique (RBS) [1] is an analytical tool that uses elastic scattering of 0.1-3 MeV charged particles to analyze the surface and the outer few micrometers of solids.
•A typical RBS system consists of an accelerator and scattering chamber with sample manipulators and particle detectors. In our RBS system the samples are bombarded with 1-3 MeV protons or alpha particles from a Van de Graaff electrostatic accelerator and the scattered particles are detected by surface barrier detector.
•The signal from the detector is processed by common nuclear electronics and the particle energy spectra are stored in a computer based multichannel analyser. The data evaluation is accomplished using standard procedures and computer codes.
•The advantage of the RBS technique lies in the quantitative analysis of major and minor constituents lying in the first 0.5 to 2.0 micrometers of a material.
•Depending on the sample structure and composition, the detection limits vary from 10^{11} to 10^{15} at. cm^{-2} for heavy and light elements respectively.
•The depth distribution of constituents can be reconstructed with a depth resolution of 10-20 nm.



- The RBS technique is non-destructive since the erosion and the radiation degradation of the sample material by the particle impact is negligible.
- Since the samples are situated in vacuum the possibility of RBS analyses of materials comprising volatile components is strongly limited.
- The most extensive use of the RBS technique is in the field of electronical and optical materials, special coatings and in the study of various physico-chemical processes on the solid surface

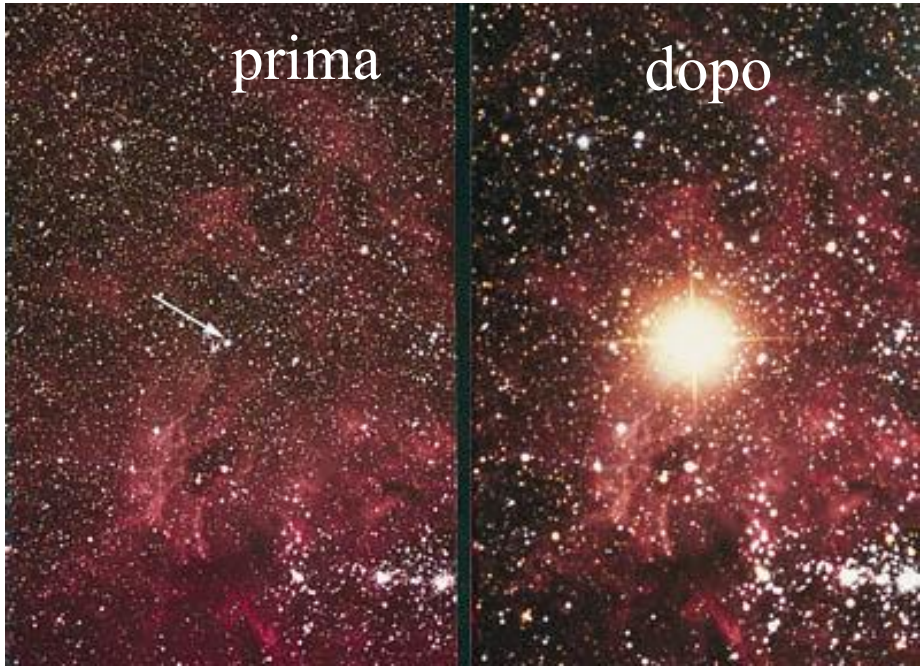
La massa dell'anti-ν_e: il decadimento del trizio

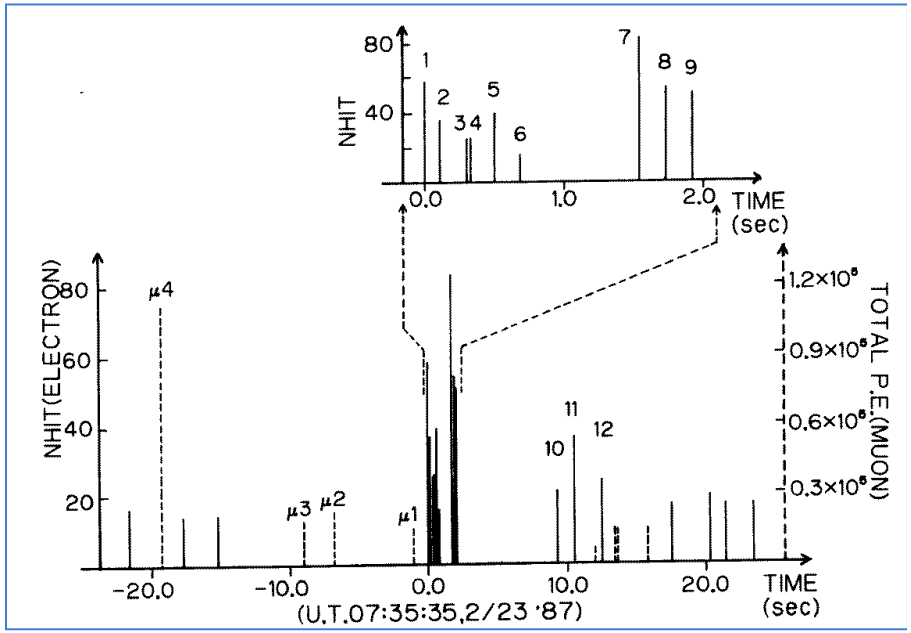


- In un decadimento $^{A}Z \rightarrow {}^{A}(Z+1) + e^- + \text{anti}\nu_e$ una massa m_ν non nulla modifica lo spettro di energia dell'elettrone in vicinanza del suo massimo (end-point).
- In particolare $T_{max} = m_Z - m_{Z+1} - m_e - m_\nu$ diminuisce per $m_\nu \neq 0$ e cambia la pendenza dello spettro, che è la quantità più facilmente determinabile
- L'esperimento richiede una sorgente che produca elettroni con energia bassa, in modo da poter apprezzare effetti di masse piccole, dell'ordine dell'eV, e quindi Q valori piccoli.
- Al tempo stesso si richiede tempi di decadimento abbastanza rapidi, in modo da poter osservare un numero sufficientemente elevato di decadimenti.
- Le due richieste sono sostanzialmente contrastanti, perché le velocità di decadimento crescono con una potenza elevata del Q valore.
- Il miglior compromesso è rappresentato dal decadimento del Trizio, $t \rightarrow 3He + e^-$ $+ \text{anti}\,\nu_e$ in cui **Q=** 18.6keV e τ_t=17.9 anni.
- Gli esperimenti condotti finora hanno dato risultati consistenti con $m_\nu=0$, fornendo un limite superiore $m_\nu<3$ eV

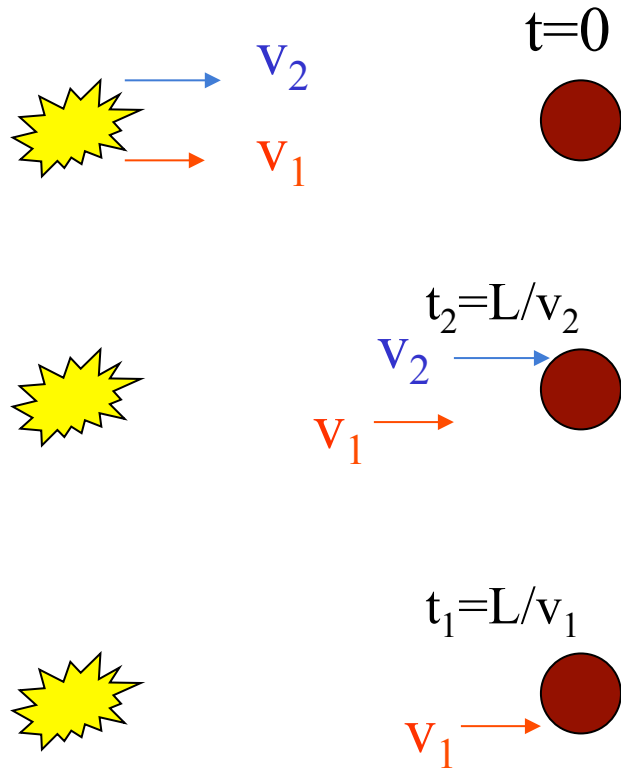
La massa dell'anti-ν_e: la SN 1987(1)

- Nel 1987 è stato osservato un burst ("lampo") di antineutrini, dall'esplosione di una supernova nelle nubi di Magellano a distanza D=cT =1.5 10^5 anni-luce.
- In un intervallo Δt=10 s dono stati osservati una dozzina di eventi della reazione anti-ν_e + p -> n + e^+ .
- Dalle energie rilasciate dai positroni si risale alle energie degli antineutrini, che sono comprese fra $E_1 \approx 10$MeV ed $E_2 \approx$ 30MeV.
- I dati sperimentali confermano il quadro teorico generale:il collasso che conduce a una supernova emette in pochi secondi un lampo di (neutrini e) antineutrini, con energie di una decina di MeV, per un totale di circa 10^{53}erg.
- I dati forniscono anche un'informazione sulle masse degli antineutrini, basata sul fatto che se la massa *m* non è nulla, neutrini con energie E_i diverse hanno velocità v_i diverse e quindi raggiungono la terra in tempi t_i =D/v_i diversi.





La massa dell'anti-ν_e: la SN 1987 (2)

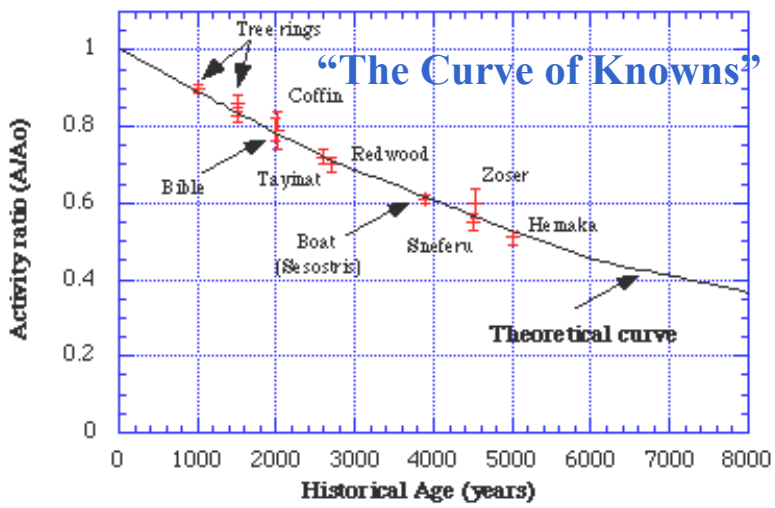


- Differenze di velocità percentualmente molto piccole possono essere messe in evidenza nel lungo tratto di percorrenza, che separa le nubi di Magellano da noi.
- Si può calcolare $1/v_i$ da:
  $c/v_i = E_i/p_i = E_i/(E_i^2-m^2)^{1/2}$.
- Supponendo $E_i >> mc^2$ al primo ordine si ha $c/v_i = 1+1/2\, m^2/E_i^2$ e dunque:
  $t_i = (D/c)(c/v_i) = T[1+1/2\, m^2/E_i^2]$.
- Imponendo che il ritardo t_1-t_2 non superi il valore osservato Δt si trova:
  $\Delta t > 1/2(D/c)m^2[1/E_1^2-1/E_2^2]$
- Questa può essere utilizzata per porre un limite sulla massa dell'antineutrino:
  $m<[(2\,\Delta t/T)\, E_1^2\, E_2^2/(E_2^2-E_1^2)]^{1/2}$

- Ponendo:
  $\Delta t=10$ s , $T=1.5\ 10^5$anni, $E_1=10$MeV ed $E_2=30$MeV si trova:
  $m<20$eV,
- Un limite non stringente come quello ottenuto con esperimenti nel laboratorio, ma comunque interessante.

Un'applicazione del decadimento beta:la datazione col radiocarbonio

- Il Carbonio nell'atmosfera è presente nei suoi isotopi stabili (^{12}C: 98.9%, ^{13}C: 1.1%) e in piccolissima parte ($r_o=10^{-12}$) sotto forma di ^{14}C, un nucleo instabile ($^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e + \text{anti-}\nu_e$)che emette elettroni con <T>=150 keV e $t_{1/2}$=5730± 40 anni.
- Il ^{14}C viene prodotto da parte dei raggi cosmici mediante reazioni di di spallazione ($n + {}^{14}N \rightarrow {}^{14}C + p$) e 2) a un ritmo approssimativamente costante.
- La concentrazione $r_0 = 10^{-12}$ è il valore di equilibrio fra la produzione e il decadimento spontaneo.
- Il ^{14}C formato nell'atmosfera si ossida in $^{14}CO_2$ ed entra nel ciclo biologico attraverso la fotosintesi e la catena alimentare.



- Poiché la chimica non distingue gli isotopi, negli organismi viventi si ha la stessa concentrazione di 14 C che nell'atmosfera.
- Da quando l'organismo muore (t=0) il 14C può solo decadere, e la sua concentrazione r (t)evolve secondo:

(1) $r(t) = r_0 \exp(-t/\tau)$.

- Dato un campione, si determina r(t), dal conteggio degli elettroni di decadimento, o direttamente mediante spettrometria di massa e tramite (1) si risale all' età del campione..

Sviluppi del metodo del radiocarbonio: Spettrometria di massa con acceleratori

- The major developments in the radiocarbon method up to the present day involve improvements in calibration and measurement techniques
- Calibration:Radiocarbon dates of sequential dendrochronologically aged trees primarily of US bristlecone pine and German and Irish oak have been measured to produce a calendrical / radiocarbon calibration curve which now extends back over 10 000 years (more on Calibration). This enables radiocarbon dates to be calibrated to solar or calendar dates.
- Briefly, the initial solid carbon method developed by Libby and his collaborators was replaced with the Gas counting method in the 1950's. Liquid scintillation counting, utilising benzene, acetylene, ethanol, methanol etc, was developed at about the same time. Today the vast majority of radiocarbon laboratories utilise these two methods of radiocarbon dating.
- The method applies as long as we have enough 14C intensity to determine its activity. For matter that has decayed for 10 or more half lives the decay is so weak that the 14C method cannot be used.
- **Of major recent interest is the development of the Accelerator Mass Spectrometry method of direct 14C isotope counting. In 1977, the first AMS measurements were conducted by teams at Rochester/Toronto and the General Ionex Corporation and soon after at the Universities of Simon Fraser and McMaster (Gove, 1994). The crucial advantage of the AMS method is that milligram sized samples are required for dating.**
- Of great public interest has been the AMS dating of carbonacous material from prehistoric rock art sites, the Shroud of Turin and the Dead Sea Scrolls in the last few years. The development of high-precision dating (up to ±2.0 per mille or ±16 yr) in a number of gas and liquid scintillation facilities has been of similar importance

Decadimenti di sistemi atomici (1)

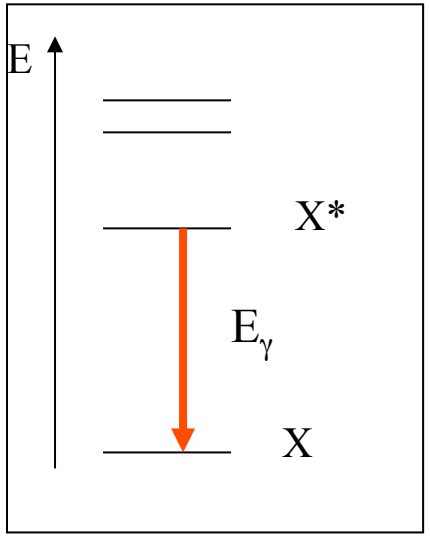
- Consideriamo un atomo in uno stato eccitato X* che decade nello stato fondamentale X con emissione di un fotone:

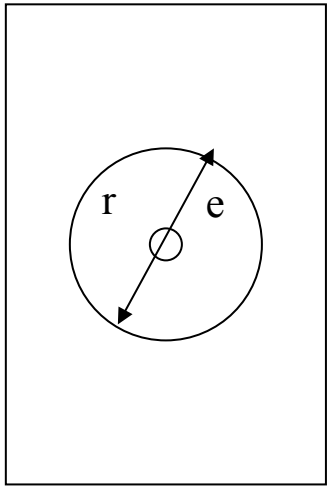
$$X^* \rightarrow X + \gamma$$

- Trascurando il rinculo dell'atomo, l'energia portata dal fotone è

$$E_\gamma = M(X^*) - M(X) = E_2 - E_1.$$

- Possiamo stimare la vita media dello stato eccitato con considerazioni semiclassiche.
- All'energia E_γ del fotone è associato un campo e.m. con frequenza $\omega = E/\hbar$; questo deve essere generato da un elettrone che oscilli con la stessa frequenza.
- Supponendo che un elettrone nell'atomo si comporti come un oscillatore armonico con frequenza ω, la sua accelerazione è $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$ e dunque $a^2 = \omega^4 r^2$, dove r è dell'ordine delle dimensioni atomiche.





- Secondo la formula di Larmor,

(1) $$dE/dt = 2/3\ (e^2/c^3)\ a^2$$

- l'energia irraggiata dall' elettrone nell' unità di tempo è:

(2) $$dE/dt = 2/3\ (e^2/c^3)\ \omega^4 r^2.$$

- Da questa posso calcolare il tempo τ perché l'elettrone emetta $\hbar\omega$, richiedendo

(3) $$dE/dt = \hbar\omega/\tau.$$

Decadimenti di sistemi atomici (2)

- Dalla (2) e (3) ricavo

  (4) $1/\tau=\lambda = 2/3\ (e^2/c^3\ \hbar^4)\ E^3 r^2$

- Sostituendo i valori numerici delle costanti fondamentali, esprimendo E in eV e r in Å, trovo:

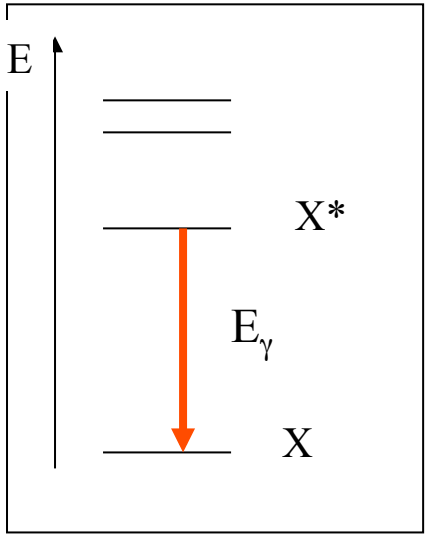
  (5) $1/\tau=\lambda = 1.6\ 10^6 s^{-1}\ (E/1eV)^3 (r/\ 1\ Å)^2$

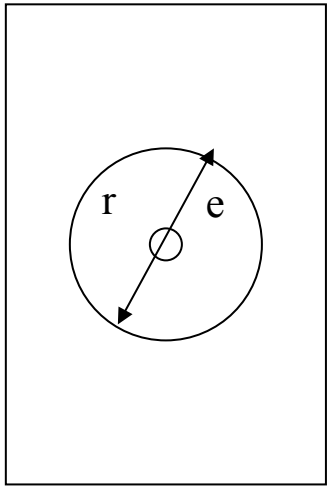
- Ponendo $r \approx 1A$, per una transizione nel visibile, E=2eV, si ha $\tau \approx 10^{-7}$ s

- Questo risultato è stato ricavato usando la formula di Larmor, che è classica, nel senso che suppone velocità non relativistiche dell'elettrone e non considera processi quantistici.

- La prima condizione è soddisfatta per elettroni nei livelli esterni di atomi non troppo pesanti ($v \approx (e^2/\hbar)\ Z/n=\alpha c\ Z/n$).

- L'introduzione degli effetti quantistici è stata nella sostituzione $E= \hbar\omega$ e $dE/dt = \hbar\omega/\tau$ e può rendere conto degli ordini di grandezza osservati.





- Il modello descritto ci spiega con semplicità il fatto che atomi con dimensioni di $\approx$ 1 Å emettano fotoni con $\lambda \approx 10^3$ Å : un elettrone su un orbita con r=1 Å e $v=e^2/\hbar=\alpha c$ ha un periodo $T=2\pi r/v= 2\pi r/(\alpha c)$.

- Il campo oscillante generato ha la stesso periodo, e dunque una lunghezza d'onda

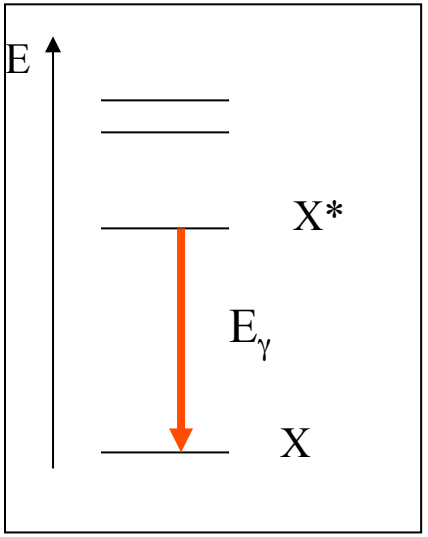
  $$\lambda = cT=r\ (2\pi/\alpha) \approx 10^3\ Å$$

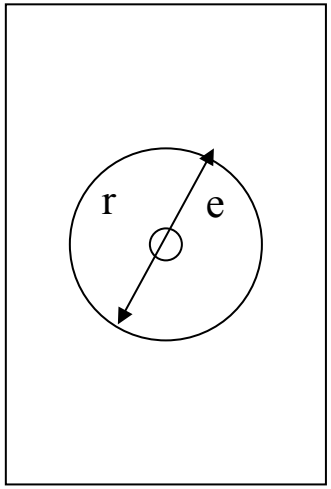
Decadimenti nucleari gamma

- I nuclei hanno livelli eccitati, con spaziature dell'ordine di qualche MeV, e si hanno processi di decadimento e.m.

  $X^* \rightarrow X + \gamma$

  qualitativamente analoghi a quelli degli atomi, con l'importante differenza che le energie dei fotoni sono **dell'ordine dei MeV e non di eV**.
- Che le energie siano di quest'ordine di grandezza è naturale conseguenza della scala delle dimensioni nucleari, $r_A = 1.1\,\text{fm}\, A^{1/3}$, e del principio di indeterminazione, che richiede a un protone in un nucleo di avere un impulso almeno di $p = \hbar/r_A$.
- Ne segue l'ordine di grandezza della velocità $v \approx p/m_p \approx \hbar/(m_p r_A)$ e della frequenza (angolare) $\omega = 2\pi/T \approx v/r_A \approx \hbar/(m_p r_A^2)$.





- Le energie della radiazione emessa saranno dunque dell'ordine

  $E_\gamma = \hbar\,\omega \approx \hbar^2/(m_p r_n^2) = (\hbar c)^2/(m_p c^2 r_A^2) \approx 40\, A^{-2/3}$ MeV.
- Usando la relazione (5) si trova il tipico ordine di grandezza dei tempi di decadimento nucleari. Infatti, possiamo riscriverla come:

  $1/\tau = \lambda = 1.6\; 10^{14} s^{-1} (E_\gamma / 1\text{MeV})^3 (r_A / 1\text{fm})^2$

  ponendo E=1MeV e r=1fm si trova

  $$\tau \approx 10^{-14} s.$$

Esercizi

1. Determinare l'energia dei fotoni nel decadimento in quiete $\pi^0 \rightarrow \gamma+\gamma$ sapendo che m_π=140 MeV. Se il decadimento avviene mentre il pione ha energia E_π determinare l'energia massima e minima dei fotoni.
2. Determinare l'energia del neutrino nel decadimento in quiete $\pi^- \rightarrow \mu+\nu$ sapendo che m_π=135 MeV e M_μ=106MeV
3. Se il π^- ha energia E_π determinare l'energia del neutrino E_ν in funzione dell'angolo θ fra l'impulso del neutrino e quello del pione. Calcolare per E_π = 1.35GeV e θ=1mrad
4. Determinare l'energia cinetica T' di una particella alfa (massa m e energia cinetica T) che viene deflessa elasticamente di un angolo q nell' urto contro un nucleo di massa M. Calcolare T' per T=5MeV e urto contro nuclei di ossigeno. per lo scattering di rutherford)
5. Supponendo che la produzione di ^{14}C avvenga con velocità ν costante, determinare l'abbondanza di ^{14}C all'equilibrio in funzione di ν e della vita media τ.
6. Il 40K decade $\beta-$, β^+ ed ε. Determinare i nuclei prodotti nei decadimenti
7. Il Potassio costituisce circa il 4 per mille della massa del corpo umano. Il ^{40}K è radioattivo, con $t_{1/2}$= 1.3 10^9anni e la sua abbondanza naturale e' $^{40}K/K = 10^{-4}$ Calcola il numero di decadimenti per unità di tempo prodotti nel tuo corpo
8. Idem per il ^{14}C, sapendo che il Carbonio rappresenta il 18% della massa del corpo umano