



Simmetrie e Leggi di Conservazione II

Isospin, Stranezza, G-parità

Elementi di Fisica delle Particelle Elementari

Diego Bettoni

Anno Accademico 2004-2005

Sommario

- Isospin
 - Definizione, conservazione
 - Isospin nel sistema πN
- Stranezza
- G-parità

Isospin

$$m_p = 938.27 \text{ MeV} \quad m_n = 939.57 \text{ MeV}$$

$$m_p \approx m_n$$

Heisenberg (1932):

*Protone e neutrone considerati come due stati di carica diversa di una unica particella, il **Nucleone**.*

Si introduce un numero quantico, l'**isospin**, conservato nelle interazioni forti, non conservato nelle interazioni elettromagnetiche.

Al nucleone si assegna isospin $I = \frac{1}{2}$

$$I_3 = +\frac{1}{2} \quad p$$

$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad n$$

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} + I_3$$

Il nucleone ha un grado di libertà interno con due stati permessi (il protone e il neutrone) che la forza nucleare non distingue.

Scrivendo gli stati del nucleone come $|I, I_3\rangle$

$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \quad |n\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Per un sistema di due nucleoni abbiamo quindi

Tripletto
(simmetrico)

$$\begin{cases} \chi(1,1) = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \\ \chi(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle + \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \right) \\ \chi(1,-1) = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \end{cases}$$

Singoletto
(antisimmetrico)

$$\chi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \right)$$

Esempio: **deuterio** (stato legato p e n in onda S)

$$\psi = \phi(spazio) \times \alpha(spin) \times \chi(isospin)$$

$$\begin{array}{ccc} (-1)^l = +1 & (-1)^{S+1} = +1 & (-1)^{I+1} \\ (l=0) & (S=1) & \end{array}$$

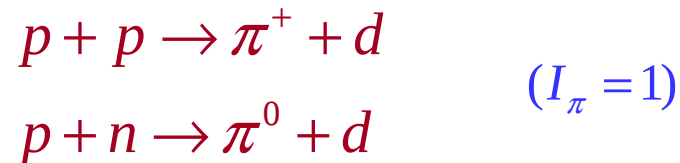


$$(-1)^{I+1} = -1 \Rightarrow I = 0$$

ψ è la funzione d'onda di due *fermioni identici* (due nucleoni), per cui deve essere **globalmente antisimmetrica**. Questo implica che il **deuterio** abbia **isospin zero**:

$$I_d = 0$$

Esempio: calcolare il rapporto tra le sezioni d'urto per i processi



Poichè $I_d=0$ in entrambe le reazioni lo stato finale ha isospin totale 1.

Per quanto riguarda gli stati iniziali:

$$\begin{aligned} pp &= |1,1\rangle \\ np &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,0\rangle - |0,0\rangle) \end{aligned}$$

La sezione d'urto

$$\sigma \propto |\text{ampiezza}|^2 \approx \sum_I |\langle I', I'_3 | A | I, I_3 \rangle|^2$$

Per la conservazione dell'isospin deve essere

$$I = I' = 1 \quad I_3 = I'_3$$

La reazione $np \rightarrow \pi^0 d$ procede con probabilità $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ rispetto a $pp \rightarrow \pi^+ d$

per cui:

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+ d)}{\sigma(np \rightarrow \pi^0 d)} = 2$$

Isospin nel sistema πN

Il π esiste in tre stati di carica, con masse vicine:

$$m_{\pi^{\pm}} = 139.57 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}$$

Si assegna dunque isospin $I_{\pi}=1$, con $Q/e=I_3$.

$$|\pi^+\rangle = |1,1\rangle \quad |\pi^0\rangle = |1,0\rangle \quad |\pi^-\rangle = |1,-1\rangle$$

Per il π si ha $B=0$:

$$\boxed{\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{B}{2}}$$

Per il sistema πN si ha $I=1/2$ oppure $I=3/2$

$$\left. \begin{array}{l} \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\ \pi^- n \rightarrow \pi^- n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{puramente} \\ I=3/2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi^- p \rightarrow \pi^- p \\ \pi^- p \rightarrow \pi^0 n \\ \pi^+ n \rightarrow \pi^+ n \\ \pi^+ n \rightarrow \pi^0 p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{una combinazione di} \\ I=1/2 \text{ e } I=3/2 \end{array}$$

I coefficienti delle combinazioni lineari, cioè i pesi relativi delle ampiezze $1/2$ e $3/2$, sono dati dai *Coefficienti di Clebsch-Gordan*

	$I = \frac{3}{2}$	$I = \frac{1}{2}$
$1 \times \frac{1}{2}$	$I_3 \quad \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$
$\pi^+ p$	1	
$\pi^+ n$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\pi^0 p$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\pi^0 n$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$\pi^- p$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$
$\pi^- n$		1

$$\begin{aligned} |\pi^+ n\rangle &= |1,1\rangle \times \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1,1\rangle \times \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1,0\rangle \times \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

- $$\begin{array}{ll}
 (1) & \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \\
 (2) & \pi^- p \rightarrow \pi^- p \\
 (3) & \pi^- p \rightarrow \pi^0 n
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Scattering elastico} \\ \text{Scambio carica} \end{array}$$

$$\sigma \propto \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 = \left| M_{if} \right|^2 \quad H = \begin{cases} H_1 & \text{se agisce fra stati } I=1/2 \\ H_3 & \text{se agisce fra stati } I=3/2 \end{cases}$$

sia

$$M_1 = \left\langle I = \frac{1}{2} \left| H_1 \right| I = \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$M_3 = \left\langle I = \frac{3}{2} \left| H_3 \right| I = \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$(1) \quad \sigma_1 = K |M_3|^2$$

$$|i\rangle = |f\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$(2) \quad \sigma_2 = K \left| \langle f | (H_1 + H_3) | i \rangle \right|^2$$

$$\sigma_2 = K \left| \frac{1}{3} M_3 + \frac{2}{3} M_1 \right|^2$$

$$(3) \quad |i\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$|f\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\sigma_3 = K \left| \sqrt{\frac{2}{9}} M_3 - \sqrt{\frac{2}{9}} M_1 \right|^2$$

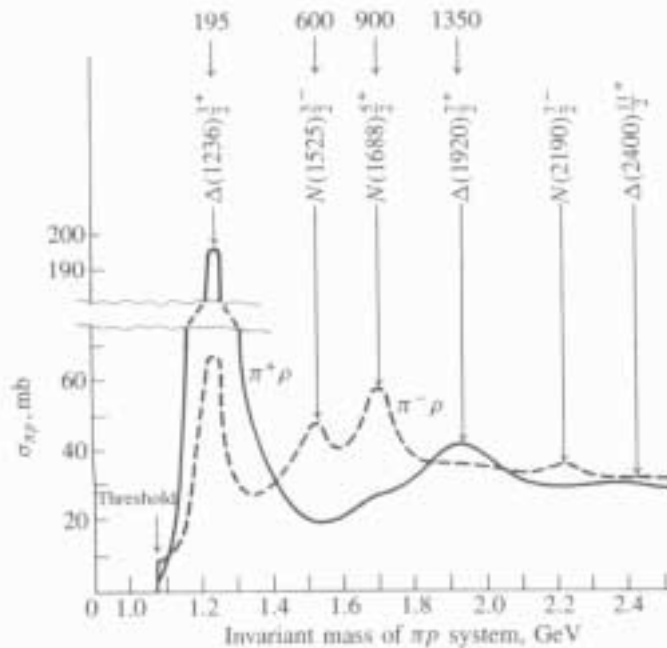
$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 =$$

$$|M_3|^2 : \frac{1}{9} |M_3 + 2M_1|^2 : \frac{2}{9} |M_3 - M_1|^2$$

$$M_3 \gg M_1 \quad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 9 : 1 : 2$$

$$M_1 \gg M_3 \quad \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 1 : 2$$

Sezione d'urto totale $\pi^\pm p$



$$\Delta(1236) \quad \Gamma = 120 \text{ MeV}$$

$$J^P = \frac{3}{2}^+ \quad I = \frac{3}{2} \quad (3,3)$$

$$\sigma(E) = \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}}{(E - M_R^2) + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$a+b \rightarrow R \rightarrow c+d$$

Stranezza S

Le particelle strane sono **prodotte** abbondantemente in **interazioni forti** e hanno vita media lunga, tipica di un **decadimento debole**.

S numero quantico di stranezza *conservato nelle interazioni forti ed elettromagnetiche, non conservato nelle interazioni deboli*.

Esempio: $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$

$$\hookrightarrow p + \pi^- \quad \tau = 2.6 \times 10^{-10} \text{ s}$$

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-$$

$$I \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$$

$$I_3 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -1$$

$I = 0$, perchè Λ non ha controparti cariche

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$$

$$I \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$I_3 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} K^0, K^+ \quad \frac{Q}{e} = I_3 + \frac{1}{2} \\ \bar{K}^0, K^- \quad \frac{Q}{e} = I_3 - \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \frac{Q}{e} = I_3 + \frac{B+S}{2} \quad (\text{Gell-Mann e Nishijima})$$

$Y = B+S$ ipercarica

Dalla formula di Gell-Mann e Nishijima le assegnazioni di stranezza si fanno insieme alle assegnazioni di isospin.

Per es.:

$$n, p \quad S = 0 \quad I = \frac{1}{2}$$

$$\Lambda \quad S = -1 \quad I = 0$$

$$K^0, K^+ \quad S = 1 \quad I = \frac{1}{2}$$

$$K^-, \bar{K}^0 \quad S = -1 \quad I = \frac{1}{2}$$

Esempio di conservazione della stranezza:

$$K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^0$$

$$S \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

$$I_3 \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0$$

$\pi^\pm + p \rightarrow \Sigma^\pm + K^+$					$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma \quad e.m.$			
S	0	0	-1	+1	S	-1	-1	0
I	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+ \quad debole$		
I_3	± 1	$\frac{1}{2}$	± 1	$\frac{1}{2}$	S	-1	0	0
						$\Xi^- \rightarrow \Lambda + \pi^- \quad debole$		
					S	-2	-1	0

G-parità G

$$G = Ce^{i\pi I_2}$$

Rotazione di π intorno all'asse 2 nello spazio di isospin seguita dalla coniugazione di carica.

$$I_3 \xrightarrow{e^{i\pi I_2}} -I_3 \xrightarrow{C} I_3$$

Per uno stato $\chi(I, I_3=0)$ il comportamento sotto una rotazione è uguale a quello dell'armonica sferica $Y_l^0(\theta, \varphi)$ (per rotazioni nello spazio ordinario)

La rotazione intorno all'asse 2 implica:

$$\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta \quad \varphi \rightarrow \pi - \varphi$$

$$Y_l^0 \rightarrow (-1)^l Y_l^0$$

Quindi

$$\chi(I, 0) \rightarrow (-1)^I \chi(I, 0)$$

Es.: per un sistema nucleone-antinucleone l'effetto di **C** è di dare un fattore $(-1)^{l+s}$ (cfr. positronio). Quindi:

$$G|\psi(N\bar{N})\rangle = (-1)^{l+s+I}|\psi(N\bar{N})\rangle$$

Questa formula ha **validità generale**, non limitata al caso $I_3=0$.

Per i π $G|\pi^+\rangle = \pm|\pi^+\rangle$

$$G|\pi^-\rangle = \pm|\pi^-\rangle$$

$$G|\pi^0\rangle = \pm|\pi^0\rangle$$

Per il π^0 **C=+1** ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$), la rotazione dà $(-1)^l = -1$ ($l=1$) per cui $G = -1$.

$$G_{\pi^0} = -1$$

Per convenzione si assegnano le fasi in modo che tutti *i membri di un multipletto di isospin abbiano la stessa G-parità*.

$$G|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle \quad \text{con} \quad C|\pi^\pm\rangle = -|\pi^\mp\rangle$$

Poichè G rovescia il numero barionico B , **gli autostati di G devono avere $B=0$.**

G è un numero quantico moltiplicativo, per cui per un sistema di n π

$$G=(-1)^n$$

$$\rho \rightarrow \pi\pi \quad G_\rho = +1$$

$$\omega \rightarrow \pi\pi\pi \quad G_\omega = -1 \quad B.R. = 89\%$$

$$\omega \rightarrow \pi\pi \quad G_f = +1 \quad B.R. = 2.2\%$$

$$\eta \rightarrow \gamma\gamma \quad C=+1 \text{ che, con } l=0, \text{ dà } G=+1.$$

$$\eta \nrightarrow \pi\pi \quad \text{viola } P$$

$$\eta \rightarrow \pi\pi\pi \quad \text{viola } G \Rightarrow e.m.$$

Esercizi

- Quali condizioni pone il decadimento $K^0 \rightarrow 2\pi^0$ (a) sullo spin del K e (b) sulla parità del K.
- Trovare una relazione tra le sezioni d'urto totali (a una certa energia) per le seguenti reazioni:

$$\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0$$

$$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$$

- Dedurre attraverso quali canali di isospin procedono le reazioni (a) $K^+ p \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ e (b) $K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$. Trovare il rapporto tra le sezioni d'urto di (a) e (b) nell'ipotesi che domini l'uno o l'altro canale di isospin.
- In quali canali di isospin possono esistere $\pi^+ \pi^- \pi^0$ e $\pi^0 \pi^0 \pi^0$?
- Quali dei seguenti decadimenti del mesone ρ ($J^{PC}=1^{--}$, $I=1$) sono permessi in interazione forte o elettromagnetica ?
 - $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$
 - $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$
 - $\rho^0 \rightarrow \eta \pi^0$
 - $\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$