

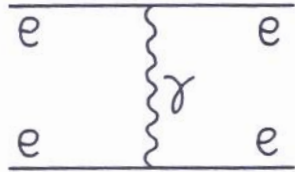
Costanti di Accoppiamento

Fenomenologia delle Interazioni Elettrodeboli

Diego Bettoni

Anno Accademico 2008-09

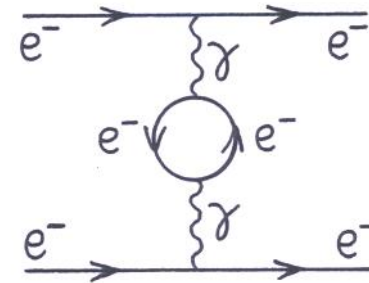
La costante di struttura fine in realtà non è una costante, ma varia in funzione del quadrimpulso trasferito. Un simile comportamento vale per le altre costanti di accoppiamento del modello standard α_2 e α_3 .



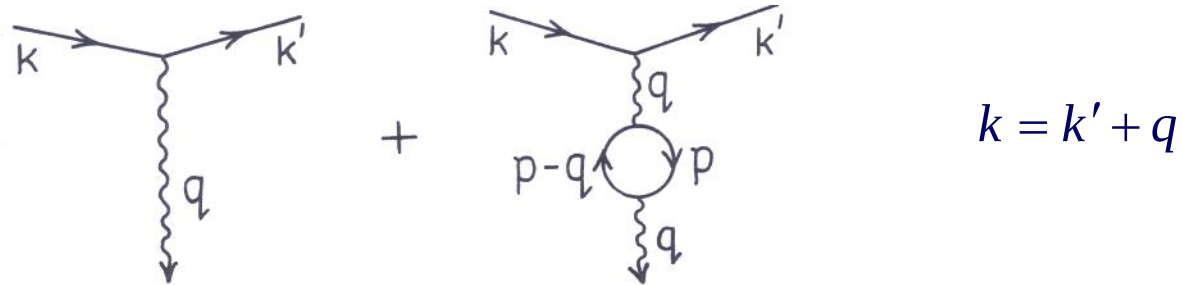
Questo grafico all'ordine α^2 permette di calcolare la sezione d'urto di Rutherford e la legge di Coulomb, ma ci sono anche correzioni di ordine superiore.

Il contributo di grafici come questo si ottiene integrando su tutti i possibili impulsi per gli elettroni nel loop.

Nel calcolo il contributo risulta infinito, ma è possibile rimuovere tutti gli infiniti in modo coerente (rinormalizzazione).



QED



Possiamo scrivere i due contributi come:

$$e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\varepsilon_\mu - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)] \frac{1}{q^2} \frac{[e\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p-q)][e\bar{u}(p-q)\gamma^\lambda u(p)]}{(p^2 - M^2)[(p-q)^2 - M^2]} \varepsilon_\lambda$$

ε_μ è la polarizzazione del fotone, M la massa dell'elettrone.

Sottintesa somma sugli spin degli elettroni nel loop.

$$e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k) \left[\varepsilon_\mu - \frac{e^2 \varepsilon^\lambda}{q^2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[e\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p-q)][e\bar{u}(p-q)\gamma_\lambda u(p)]}{(p^2 - M^2)[(p-q)^2 - M^2]} \right]$$

L'espressione precedente si può scrivere come:

$$e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)[\varepsilon_\mu + \varepsilon^\lambda T_{\mu\lambda}]$$

Nel calcolo di $T_{\mu\lambda}$ si possono eliminare termini proporzionali a q_μ e q_λ perchè per la polarizzazione del fotone vale:

$$\varepsilon_\mu q^\mu = 0$$

La corrente elettronica $j^\mu = e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)$ soddisfa la relazione: $q_\mu j^\mu = 0$

$$\Rightarrow T_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda} I(q^2)$$

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{M^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(1 - \frac{q^2 x(1-x)}{M^2} \right)$$

L'integrale ha una divergenza logaritmica (primo termine dell'equazione). Questo infinito non dipende da q^2 .

La parte finita dell'integrale si può calcolare analiticamente. Nel regime di piccole distanze, elevato $|q^2|$ otteniamo:

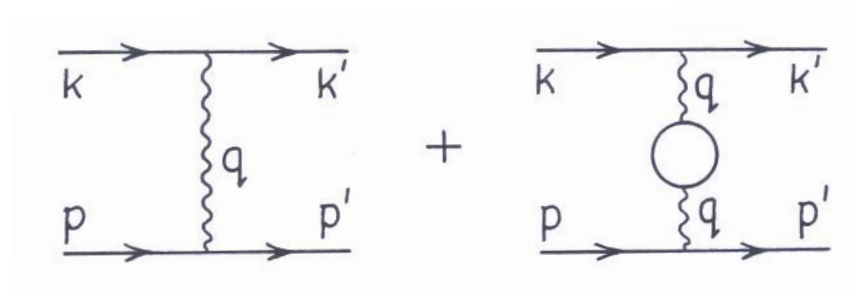
$$-\frac{q^2}{M^2} \gg 1 \Rightarrow \ln\left(1 - \frac{q^2 x(1-x)}{M^2}\right) \approx \ln\left(-\frac{q^2}{M^2}\right)$$

Scriviamo l'infinito in forma di limite superiore Λ :

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{M^2} - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{M^2}\right)$$

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right)$$

$$ie\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)\varepsilon_\mu \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2}\right)\right]$$



$$e^2 \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \right] (\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)) (\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p))$$

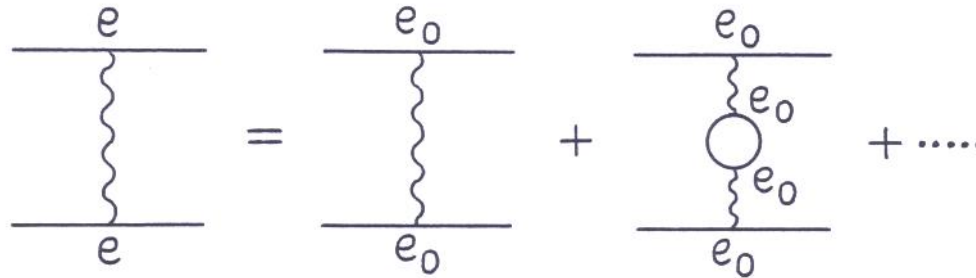
Supponiamo di includere più di un loop. Poichè ogni fotone ha quadrimpulso q i loop fattorizzano e otteniamo una serie del tipo:

$$1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots \rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Quindi il coefficiente completo è:

$$e^2 \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \right]$$

Il valore misurato di α include tutti i contributi dai grafici con i loop e dipende dal valore di q^2 . Quindi in pratica dobbiamo scegliere una particolare scala di energia μ^2 , quindi misuriamo $\alpha(q^2 = -\mu^2)$.



$$e_0 \quad \alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi}$$

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \right]}$$

Possiamo ora calcolare α per qualsiasi valore di q^2 :

$$\begin{aligned}\alpha(q^2) &= \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2}} \\ &= \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left[\left(\frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) \left(\frac{\mu^2}{\mu^2} \right) \right]} \\ &= \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \left[\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \ln \frac{\mu^2}{-q^2} \right]}\end{aligned}$$

$$1 + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) = \frac{\alpha_0}{\alpha(\mu^2)}$$

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha_0}{\left[\frac{\alpha_0}{\alpha(\mu^2)} + \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{-q^2} \right) \right]}$$

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{\left[1 + \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)\right]}$$

Running Coupling Constant

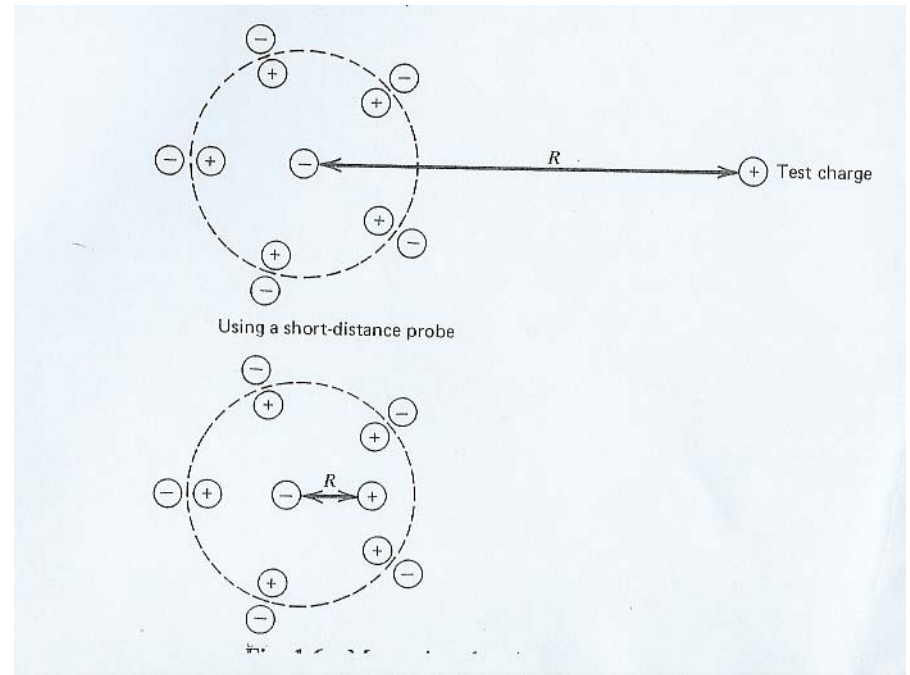
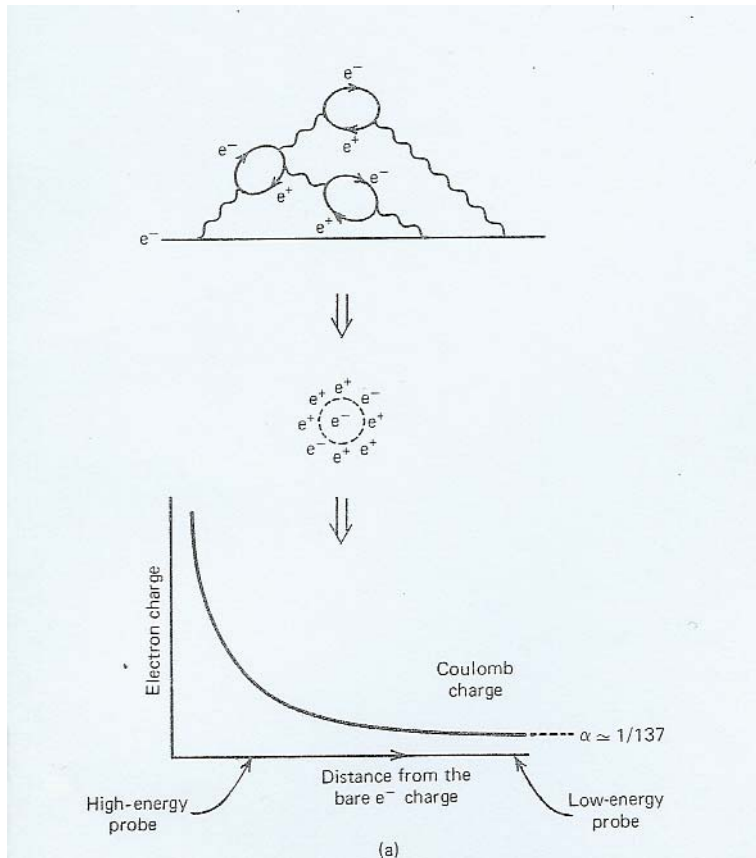
- Non dipende nè da Λ nè da α_0 .
- Nell'espressione ci sono solo quantità finite.
- Dipende soltanto da quantità fisiche: $\alpha(\mu^2)$ e q^2 .

Oltre ai loop con gli elettroni dobbiamo considerare quelli con gli altri leptoni e quarks, per cui il risultato si deve moltiplicare per un fattore:

$$n_l + 3\left(\frac{4}{9}\right)n_u + 3\left(\frac{1}{9}\right)n_d$$

- n_l numero di leptoni carichi.
- n_u, n_d numero di quarks di tipo up e di tipo down.
- Include il fattore 3 di colore e la carica al quadrato.
- Per piccoli valori di q^2 la massa del fermione nel propagatore può ridurre il contributo.
- Se ci sono N famiglie il contributo è $N[1 + 4/3 + 1/3] = 8N/3$
- Se $|q^2| \gg M_W^2$ si devono includere loop con il W .

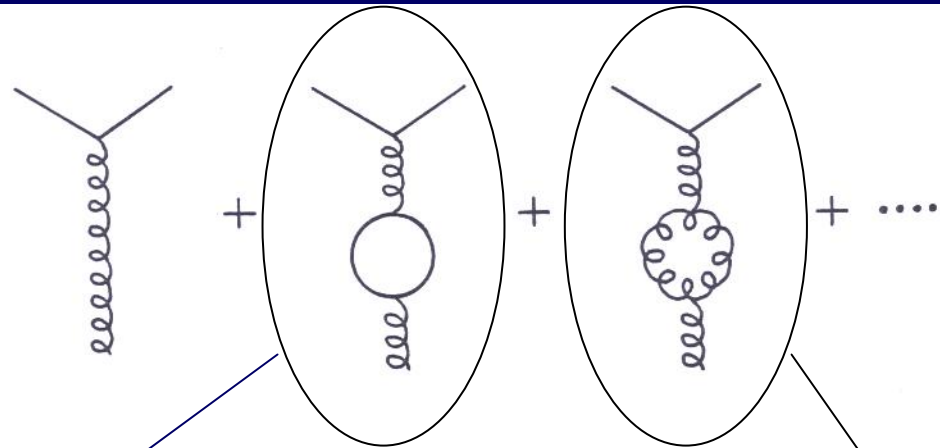
Il segno relativo dei due termini del denominatore è molto importante: indica che α aumenta all'aumentare di q^2 . Effetto di schermatura in QED.



$$\alpha(4M_e^2) = \frac{1}{137} \quad n_l = n_u = n_d = 3$$

$$\frac{\alpha(M_W^2)}{\alpha(4M_e^2)} \approx \frac{1}{1 - \frac{8}{3\pi \times 137} \ln \frac{M_W^2}{4M_e^2}} \approx 1.1$$

QCD



Dà lo stesso contributo per ciascun flavor di quark (la forza di colore è indipendente da flavor).

$$\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \rightarrow \frac{\alpha_3(\mu^2)}{6\pi}$$

fattore di colore, per ogni flavor.

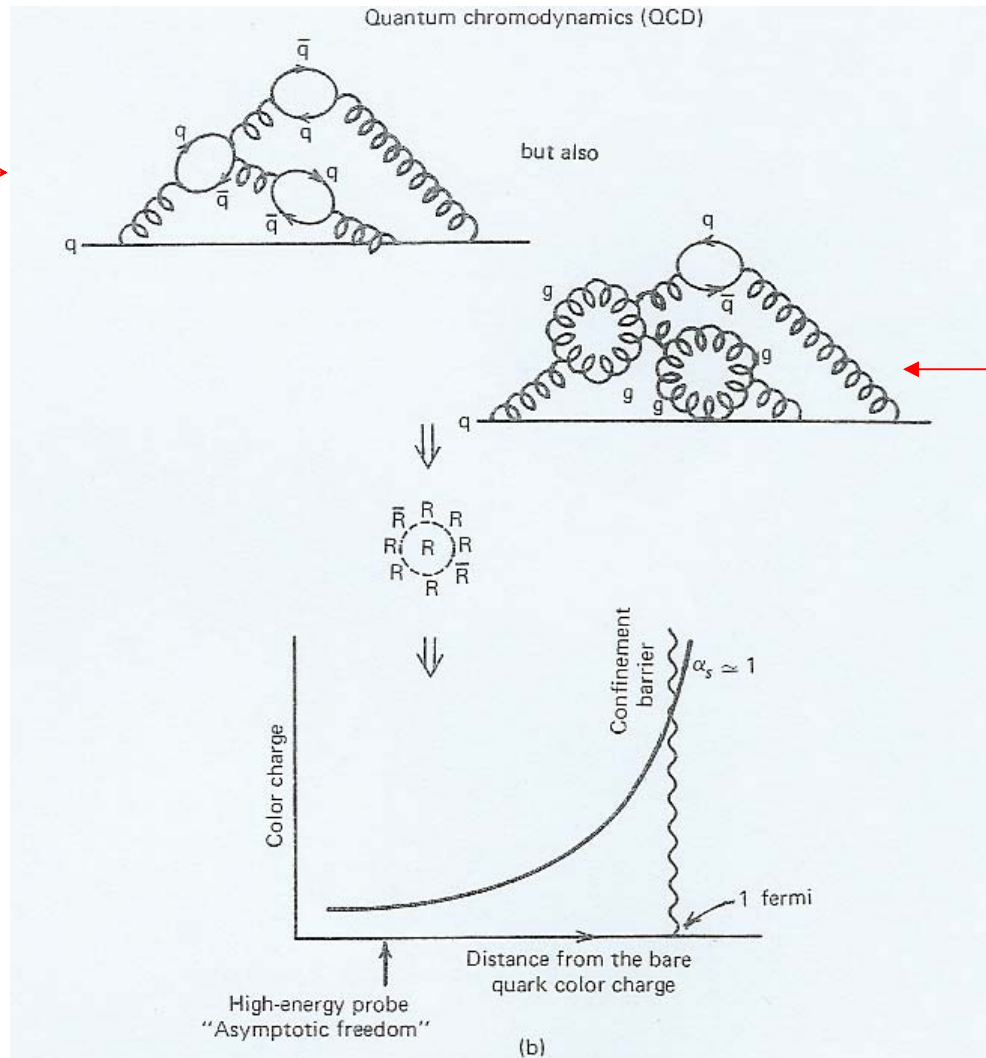
Nuovo rispetto a QED

Dà solo un fattore numerico:

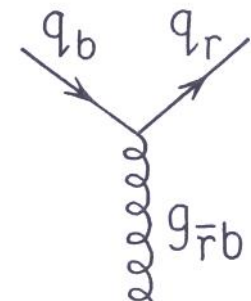
- 8 gluoni, contributo maggiore del secondo
- Il contributo è di segno opposto
- Libertà asintotica

Schermatura di carica in QCD e andamento di α_s

QED
analog



gluon
self coupling
in QCD



Combinando le due correzioni otteniamo:

$$\frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \rightarrow \frac{\alpha_3(\mu^2)}{4\pi} \left(\frac{2}{3} n_f - 11 \right)$$

$$\alpha_3(q^2) = \frac{\alpha_3(\mu^2)}{\left[1 + \frac{\alpha_3(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) \right]}$$

Fintanto che $(33-2n_f) > 0$ α_3 diminuisce all'aumentare di $|q^2|$.

Per valori di $|q^2|$ molto elevati il risultato risulta indipendente da $\alpha_3(\mu^2)$.

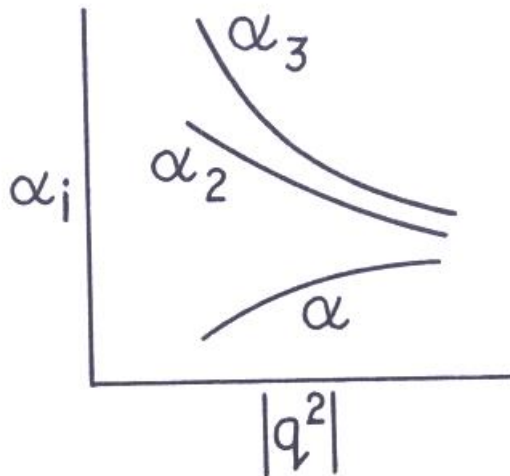
Per valori piccoli di $|q^2|$ i due termini del denominatore sono opposti e $\alpha_3(q^2)$ diventa molto grande. Inoltre per $q^2 = -\Lambda_{\text{QCD}}^2$ il denominatore si può annullare (in questo regime i nostri calcoli non sono corretti perchè molti altri diagrammi diventano importanti, ma l'effettivo qualitativo rimane).

$$\ln \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\mu^2} = - \frac{12\pi}{\alpha_3(\mu^2)} \frac{1}{33 - 2n_f}$$

$$\Lambda_{QCD} = \mu \exp \left\{ - \frac{6\pi}{(33 - 2n_f) \alpha_3(\mu^2)} \right\}$$

$$\mu = 10 \text{ GeV} \quad \alpha_3 = 0.2 \quad n_f = 5$$

$$\Lambda_{QCD} \approx 166 \text{ MeV}$$



- Il comportamento di α_2 è simile a quello di α_3 perchè i loop bosonici dominano a causa della maggiore carica elettrodebole rispetto ai fermioni.
- La struttura della teoria implica che la forza con il gruppo di simmetria piu' grande diventa la più forte a basse energie.