

Il Modello a Quark

Elementi di Fisica delle Particelle Elementari

Diego Bettoni
Anno Accademico 2004-2005

Sommario

- Simmetrie e gruppi (cenni)
- La simmetria di *flavour*
- Combinazioni $q_1 \bar{q}_2$: i mesoni
 - Mesoni pseudoscalari e vettoriali
 - Regola di Zweig
- Combinazioni $q_1 q_2 q_3$: i barioni
- Il colore
- Masse e momenti magnetici degli adroni

Simmetrie e Gruppi

Esempio illustrativo: Gruppo delle Rotazioni

- Due rotazioni successive R_1 seguita da R_2 sono equivalenti a una singola rotazione $\underline{R=R_2R_1}$. Il gruppo è chiuso rispetto alla moltiplicazione.
- Esiste l'identità.
- Per ogni rotazione R esiste l'inversa R^{-1} .
- In generale $R_1R_2 \neq R_2R_1$, ma vale la legge associativa: $R_3(R_2R_1) = (R_3R_2)R_1$.
- È un **gruppo continuo**: ogni rotazione può essere identificata da un insieme di parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ che variano in modo continuo e che si possono identificare con le tre componenti di un vettore $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ parallelo all'asse di rotazione.
- Le rotazioni formano un **gruppo di Lie**: ogni rotazione si può esprimere come il prodotto di una successione di rotazioni infinitesime (cioè arbitrariamente vicine all'identità). Il gruppo è quindi completamente definito da un intorno dell'identità.

- Le rotazioni sono un sottoinsieme delle trasformazioni di Lorentz e formano un gruppo di simmetria di un sistema fisico: la fisica è invariante per rotazioni.

In particolare se

$$|\psi\rangle \xrightarrow{R} |\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

deve essere:

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2$$

$U^\dagger U = 1$, U è un operatore unitario.

Gli operatori $U(R)$ formano un gruppo, con la stessa struttura del gruppo originario $(R_1, R_2, \dots)$: essi sono una rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni.

- $\langle\phi'|H|\psi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger H U|\psi\rangle = \langle\phi|H|\psi\rangle \quad U^\dagger H U = H \quad [U, H] = 0$
- U non ha una dipendenza esplicita dal tempo per cui

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

resta immutata dalla rotazione, quindi:

$$i \frac{d}{dt} \langle\psi|U|\psi\rangle = \langle\psi|UH - HU|\psi\rangle = 0$$

Il valore di aspettazione di U è una costante del moto.

- Tutte le proprietà del gruppo si ottengono considerando rotazioni infinitesime in un intorno dell'identità:

$$U = 1 - i\varepsilon J_3$$

J_3 è il **generatore** delle rotazioni intorno all'asse 3.

$$\begin{aligned} 1 &= U^\dagger U = (1 + i\varepsilon J_3^\dagger)(1 - i\varepsilon J_3) \\ &= 1 + i\varepsilon(J_3^\dagger - J_3) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$J_3^\dagger = J_3$ **hermitiano**, quindi è un'osservabile.

- Sottoponiamo il sistema a una rotazione R . Per l'invarianza sotto rotazione deve essere:

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}) = U\psi(\vec{r})$$

Per una rotazione infinitesima (di un angolo ε):

$$U\psi(x, y, z) = \psi(R^{-1}\vec{r}) = \psi(x + \varepsilon y, y - \varepsilon x, z)$$

$$= \psi(x, y, z) + \varepsilon \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

$$= \psi \left[1 - i\varepsilon (xp_y - yp_x) \right]$$

$$U\psi = (1 - i\varepsilon J_3)\psi$$

J_3 componente lungo l'asse 3 del momento angolare. L'invarianza per rotazioni corrisponde alla conservazione del momento angolare.

Per una rotazione finita:

$$U(\theta) = [U(\varepsilon)]^n = \left(1 - i \frac{\theta}{n} J_3\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-i\theta J_3}$$

I generatori hanno le regole di commutazione:

$$[J_m, J_n] = i \varepsilon_{mnl} J_l$$

Algebra di Lie

ε_{ijk} = costanti di struttura del gruppo

Le funzioni non lineari dei generatori che commutano con tutti i generatori si chiamano **operatori di Casimir**. Per il gruppo delle rotazioni l'unico operatore di Casimir è:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \qquad [J^2, J_l] = 0 \quad l = 1, 2, 3$$

esistono quindi autostati simultanei di J^2 e (per es.) J_3 :

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

Il Gruppo SU(2)

Nella rappresentazione (non banale) di dimensione più bassa del gruppo delle rotazioni ($j=1/2$) i generatori si scrivono:

$$J_k = \frac{1}{2} \sigma_k \quad k = 1, 2, 3 \quad \sigma_k = \text{matrici di Pauli}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La base di questa rappresentazione è data dagli autostati di σ_3 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che descrivono una particella di spin $1/2$ (up e down).

Le matrici di trasformazione:

$$U(\theta_i) = e^{-i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}}$$

sono unitarie. Il gruppo delle matrici unitarie 2×2 è detto **U(2)** (Unitary Group).

U(2) è però più grande di U(θ_i), in quanto le σ_i hanno traccia nulla. Per matrici hermitiane a traccia nulla si può dimostrare che:

$$\det e^{i\sigma} = e^{i\text{Tr}(\sigma)} = 1$$

Questa proprietà è conservata dalla moltiplicazione. Le matrici unitarie a traccia nulla formano un sottogruppo di U(2) detto **SU(2)** (Special Unitary). La rappresentazione di dimensione 2 è quella fondamentale.

Per un sistema composto $|j_A, j_B, m_A, m_B\rangle$ l'operatore $\mathbf{J} = \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B$ soddisfa l'algebra di Lie e gli autovalori $J(J+1)$ e M di J^2 e J_3 sono numeri quantici conservati. Il prodotto delle due rappresentazioni di dimensioni $(2j_A+1)$ e $(2j_B+1)$ si può decomporre nella somma di rappresentazioni di dimensioni $(2J+1)$ e base $|j_A, j_B, J, M\rangle$, dove

$$|j_A - j_B| \leq J \leq |j_A + j_B| \quad M = m_A + m_B$$

$$|j_A j_B J M\rangle = \sum_{m_A, m_B} C(m_A, m_B, J, M) |j_A j_B m_A m_B\rangle$$

Coefficienti di *Clebsch-Gordan*

Esempio: da due rappresentazioni di dimensione 2 ($j=1/2$) se ne ottengono una di dimensione 3 ($J=1$, tripletto) e una di dimensione 1 ($J=0$, singoletto).

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = (3 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 2)$$

$$= 4 \oplus 2 \oplus 2$$

↑
quadrupletto
spin 3/2

↙ ↘
doppietti
spin 1/2

SU(2) di Isospin

$$[I_m, I_n] = i\epsilon_{mnl} I_l$$

Generatori nella rappresentazione fondamentale:

$$I_k = \frac{1}{2} \tau_k \quad k = 1, 2, 3$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

base

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}$$

Isospin per le antiparticelle

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = e^{-i\pi\frac{\tau_2}{2}} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = -i\tau_2 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad Cp = \bar{p} \quad Cn = \bar{n}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{p}' \\ \bar{n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}$$

Affinchè l'antidoppio trasformi nello stesso modo del doppietto bisogna:

- Riordinare l'antidoppio
- Introdurre un segno meno

$$\begin{pmatrix} -\bar{n}' \\ \bar{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}$$

Per N $\bar{N}$

$$\begin{cases} |I=1, I_3=1\rangle = -p\bar{n} \\ |I=1, I_3=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(p\bar{p} - n\bar{n}) \\ |I=1, I_3=-1\rangle = n\bar{p} \\ |I=0, I_3=0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(p\bar{p} + n\bar{n}) \end{cases}$$

Il gruppo SU(3)

È il gruppo delle matrici **unitarie 3×3** con **detU=1**. I generatori sono un qualunque insieme di **8 matrici (3²-1)** linearmente indipendenti a traccia nulla. Ci sono dunque 8 generatori, di cui **2 diagonali**. Questo è anche il **numero massimo di generatori che commutano: Rango del Gruppo**.

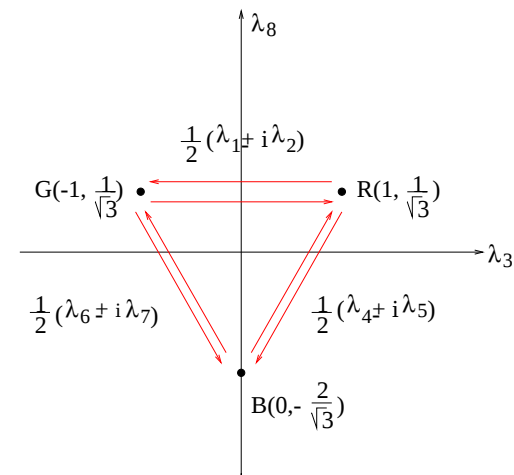
Si può dimostrare che il rango del gruppo è uguale al numero degli operatori di Casimir.

La rappresentazione fondamentale è un tripletto (es. le tre cariche di colore dei quark). **I generatori sono matrici 3×3: λ_i , $i=1,\dots,8$ (matrici di Gell-Mann).**

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovettori simultanei di λ_3 e λ_8 .



Isospin e Stranezza: Flavor SU(3)

L'introduzione di un secondo numero quantico additivo (S) a I_3 suggerisce di estendere il gruppo di simmetria da $SU(2)$ (di isospin) a un gruppo di rango 2. Nel 1961 fu proposto $SU(3)$. Il raggruppamento delle particelle in multipletti di $SU(3)$ non è però ovvio, a causa delle elevate differenze tra le masse delle varie particelle (strane e non strane). Ad esempio, l'ottetto barionico comprende particelle con differenze di massa fino a 400 MeV , su una massa media nell'ottetto di circa 1100 MeV .

La simmetria di $SU(3)$ di flavor è molto approssimata rispetto a $SU(2)$ di isospin. Vedremo come questo sia dovuto al fatto che il quark strano s è molto più pesante di u e d . Questa simmetria $SU(3)$ costituisce comunque la base del modello a quark e risulta molto utile per classificare gli stati adronici e capirne alcune proprietà.

$SU(3)$ di colore è invece una simmetria esatta di natura fondamentale per le interazioni forti.

Il Modello a Quark

Già nel 1949 Fermi e Yang, osservando che il π ha gli stessi numeri quantici di una coppia $N \bar{N}$ in uno stato 1S_0 ($B=0$, $J^P=0^-$, $S=0$, $Q=0, \pm 1$), ipotizzarono che il π si potesse considerare come uno *stato legato* $N \bar{N}$ (con energia di legame molto elevata). Dopo la scoperta delle particelle strane Sakata propose di estendere il modello aggiungendo la Λ .

Questo tripletto permette di costruire alcune particelle (tutte quelle note fino agli anni 60), ma esistevano ragioni per preferire un set diverso di costituenti fondamentali:

La regolarità con cui si presentavano le famiglie di particelle suggeriva una struttura interna anche per p, n, Λ .

*Tali regolarità venivano ben spiegate da una simmetria **SU(3)**.*

Nel 1964 Gell-Mann e, indipendentemente, Zweig proposero un insieme di *3 fermioni elementari* con i quali costruire tutti gli adroni. Gell-Mann li chiamò *quarks*, Zweig li chiamò *aces*.

- Devono essere **fermioni** per poter costruire sia bosoni che fermioni.
- In analogia all'idea di Fermi e Yang, i **mesoni** sono coppie $q_1 \bar{q}_2$; i **barioni** (antibarioni) sono stati $q_1 q_2 q_3$ ($\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{q}_3$).
- Per costruire particelle non strane con cariche $0, \pm 1$ occorrono almeno due quark. Questi devono costituire un **doppietto di isospin** (per poter avere sia $I=0$ che $I=1$).
- Per costruire anche le particelle strane occorre un **terzo quark**, cui si assegna per convenzione $S=-1$. *Il numero minimale di costituenti è dunque 3.*
- Per rendere conto dei numeri barionici ai quark si assegna $B=1/3$.
- L'assegnazione più semplice di spin-parità è $J^P=1/2^+$.
- Dalla formula di Gell-Mann e Nishijima $Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$ segue

$$Q(u) = +\frac{2}{3} \quad Q(d) = Q(s) = -\frac{1}{3}$$

I quark hanno dunque **carica elettrica frazionaria**.

	J	B	S	Y	I	I_3	Q
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	0		$-\frac{1}{3}$

Nel linguaggio di SU(3): il multipletto fondamentale, dal quale si possono costruire tutti gli altri, è un tripletto. u, d, s costituiscono il multipletto fondamentale.

- La conservazione di B implica che è impossibile creare o distruggere un singolo quark.
- Si possono creare o annichilare coppie quark-antiquark.
- La conservazione del flavor da parte delle interazioni forti implica che le transizioni con cambiamento di flavor possano avvenire solo a livello debole, per esempio:

$$s \rightarrow u + \text{leptoni}$$

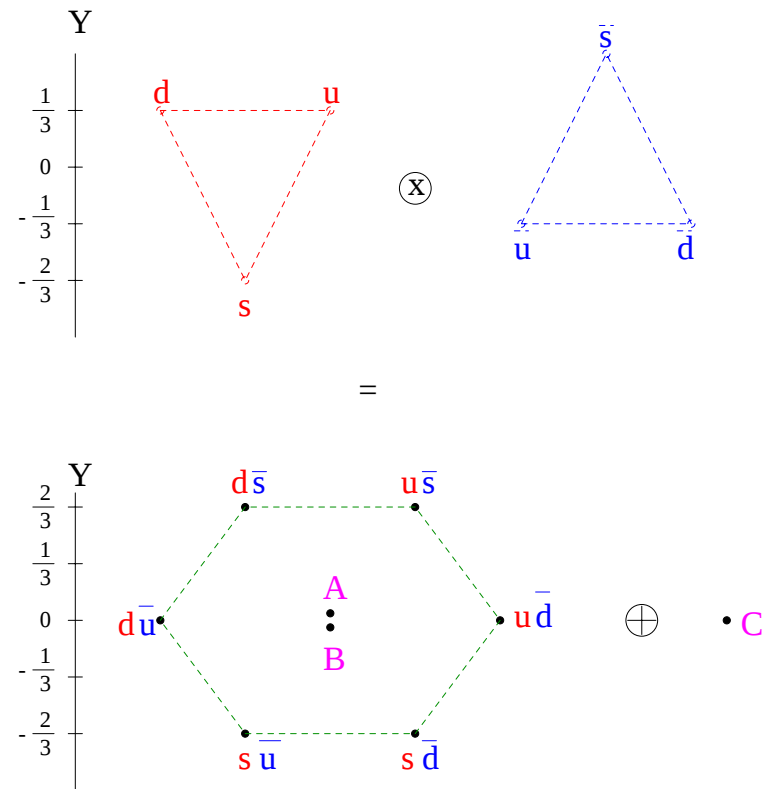
$$s \rightarrow u + d\bar{u} \quad \text{etc}$$

Combinazioni $q_1 \bar{q}_2$: i Mesoni

Partiamo da due quark (u e d) $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} |1,1\rangle = -u\bar{d} \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ |1,-1\rangle = \bar{u}d \\ |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \end{cases}$$

Aggiungendo il quark s ci sono 9 combinazioni possibili: 1 ottetto e 1 singoletto (sotto trasformazioni di SU(3) gli 8 stati si trasformano tra di loro, ma non si mescolano mai con il singoletto).



$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

Lo stato di singoletto, C , è **simmetrico nel flavor**:

$$C = \sqrt{\frac{1}{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

A è il membro neutro del tripletto di isospin:

$$(d\bar{u}, A, -u\bar{d}) \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{1}{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

I quark hanno **spin $\frac{1}{2}$** , quindi lo spin totale della coppia $q_1 \bar{q}_2$ può essere **$S=0$** oppure **$S=1$** . Lo **spin J** del mesone risulta dalla **combinazione di S e del momento angolare orbitale relativo L** . La parità P del mesone è dunque:

$$P = -(-1)^L = (-1)^{L+1}$$

↑
Prodotto delle parità intrinseche
di fermione e antifermione

Il valore di C si ottiene **scambiando q e $\bar{q}$ e poi scambiando posizioni e spin** (cfr positronio).

$$C = -(-1)^{S+1}(-1)^L = (-1)^{L+S}$$

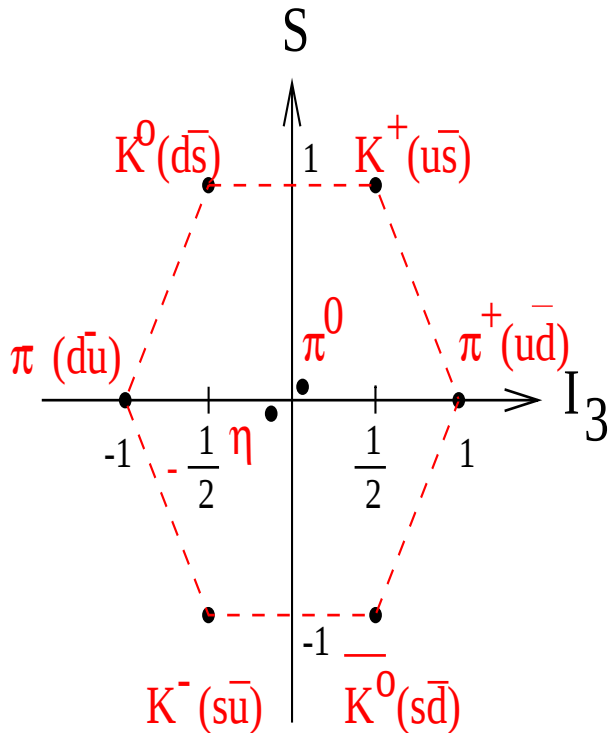
↑
Scambio dei fermioni

Numeri Quantici dei Mesoni Format dai Quark u, d, s

nonetto

$L(q\bar{q})$	$S(q\bar{q})$	J^{PC}	$I = 1$	$I = \frac{1}{2}$	$I = 0$	$M(MeV)$
$L = 0$	$S = 0$	0^{-+}	π	K	η, η'	500
	$S = 1$	1^{--}	ρ	K^*	ω, ϕ	800
$L = 1$	$S = 0$	1^{+-}	B	Q_2	$H, ?$	1250
		2^{++}	A_2	K^*	f, f'	1400
	$S = 1$	1^{++}	A_1	Q_1	$D, ?$	1300
		0^{++}	δ	K	ε, S^*	1150

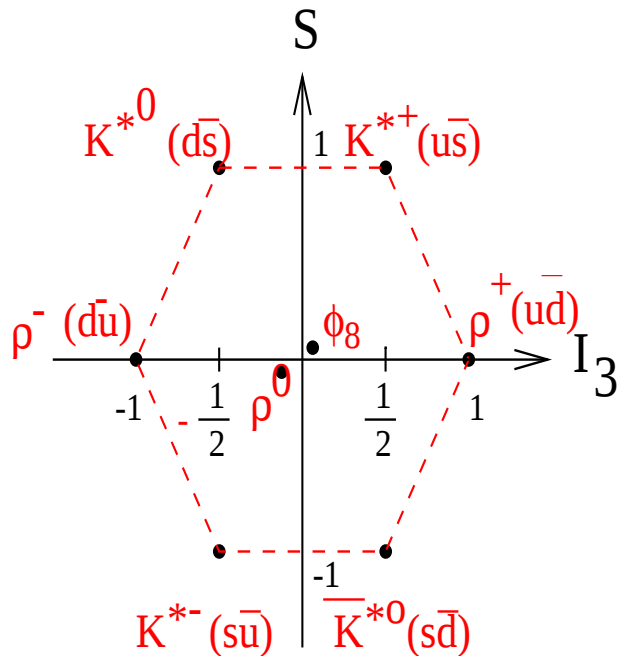
Mesoni Pseudoscalari ($J^{PC}=0^{-+}$)



• η'

I	I_3	S	Mesone	Dec	$M(\text{MeV})$
1	1	0	π^+	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	140
1	-1	0	π^-	$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$	140
1	0	0	π^0	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	135
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+1	K^+	$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$	494
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+1	K^0	$K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	498
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	K^-	$K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$	494
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	498
0	0	0	η	$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	549
0	0	0	η'	$\eta' \rightarrow \eta \pi \pi$	958
			η'	$\eta' \rightarrow \gamma\gamma$	

Mesoni Vettoriali ($J^{PC}=1^{--}$)



Il q_1 e il $\bar{q}_2$ sono in uno stato 3S_1 ($L=0, J=1, S=1$). Le funzioni d'onda per il singoletto ϕ_0 e per il membro neutro dell'ottetto ϕ_8 si scrivono:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (d\bar{d} + u\bar{u} + s\bar{s})$$

• ϕ_0

$$\phi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$$

Le particelle fisiche (cioè osservate in natura) sono combinazioni lineari di ϕ_0 e ϕ_8 :

$$\phi = \phi_0 \sin \theta - \phi_8 \cos \theta \quad \omega = \phi_0 \cos \theta + \phi_8 \sin \theta$$

Nel caso di *mixing ideale* $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \theta \approx 35^\circ$

$$\phi = s\bar{s}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$$

Decadimenti del Mesone ϕ e Regola di Zweig

$$\phi \rightarrow K^+ K^- \quad 49.1\%$$

$$\rightarrow K_L^0 K_S^0 \quad 34.4\%$$

$$\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad 15.3\%$$

$$\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad 88.8\%$$

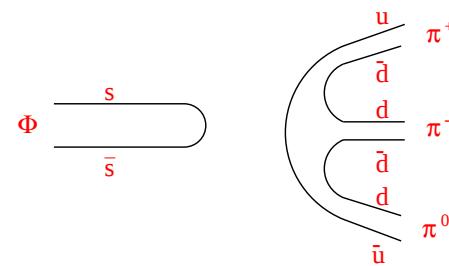
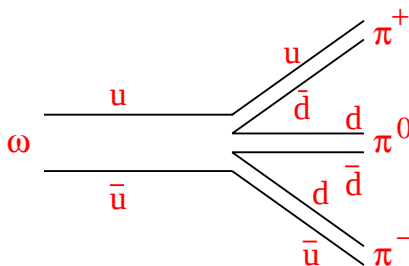
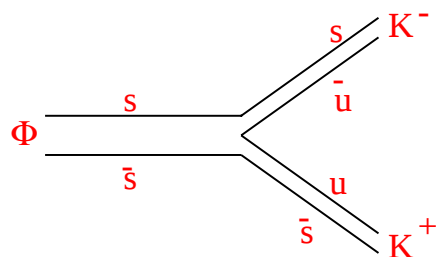
$$\rightarrow \pi^0 \gamma \quad 8.5\%$$

$$\rightarrow \pi^+ \pi^- \quad 2.2\%$$

Per il $\phi(1020)$ lo spazio delle fasi favorirebbe molto il decadimento in 3π rispetto a quello in $2K$:

$$Q_{3\pi} \equiv M_\phi - 2M_{\pi^\pm} - M_{\pi^0} \approx 600 \text{ MeV}$$

$$Q_{2K^0} \equiv M_\phi - 2M_{K^0} \approx 24 \text{ MeV} \quad Q_{2K^\pm} \approx 32 \text{ MeV}$$



Il diagramma per il decadimento in 3π è **soppresso perchè contiene linee di quark sconnesse (regola di Zweig)**. La soppressione cinematica del decadimento in $2K$ si riflette nella piccola larghezza totale del ϕ : $\Gamma_\phi = (4.26 \pm 0.05) \text{ MeV}$ da confrontare, per esempio, con $\Gamma_\rho = (150.3 \pm 1.6) \text{ MeV}$.

Decadimenti Leptonici dei Mesoni Vettoriali

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$$

$$\phi = s\bar{s}$$

Consideriamo i decadimenti

$$V \rightarrow l^+ l^- \quad V = \rho, \omega, \phi \quad l = e, \mu$$

La larghezza parziale è data da:

$$\Gamma(V \rightarrow l^+ l^-) = \frac{16\pi\alpha^2 Q^2}{M_V^2} |\psi(0)|^2$$

$$Q^2 = \left| \sum a_i Q_i \right|^2; \quad M_V = \text{massa di } V; \quad m_l^2 \ll M_V^2$$

ρ, ω, ϕ hanno masse vicine

$$\Rightarrow \frac{|\psi(0)|^2}{M_V^2} \approx \text{costante}$$

$$\Gamma(V \rightarrow l^+ l^-) \propto Q^2$$

$$\rho^0 : \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$\omega : \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{18} \quad \phi : \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

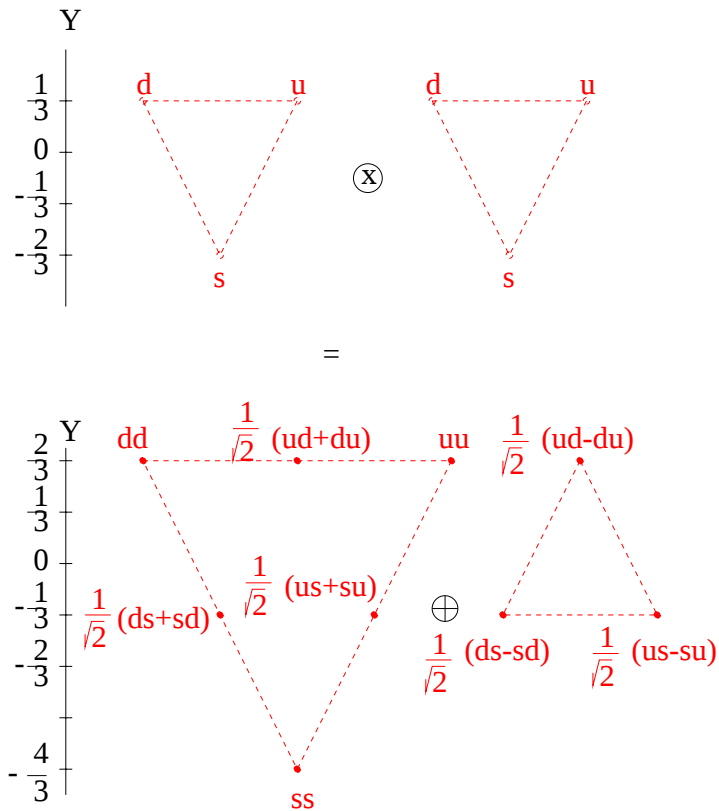
$$\Rightarrow \Gamma(\rho^0) : \Gamma(\omega) : \Gamma(\phi) = 9 : 1 : 2$$

Sperimentalmente

$$\frac{\Gamma(\rho^0 \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-)} = 11.3$$

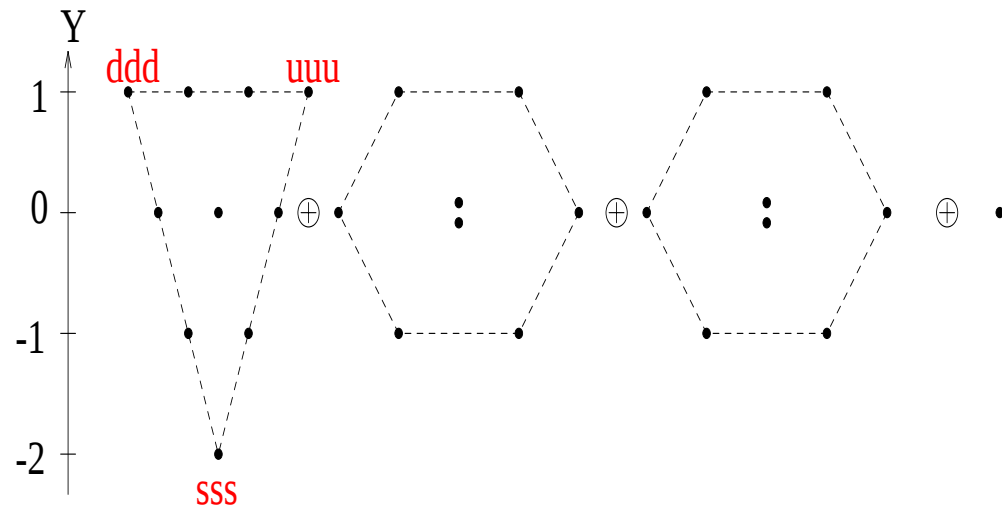
$$\frac{\Gamma(\phi \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-)} = 2.3$$

Stati a 3 quark: Barioni



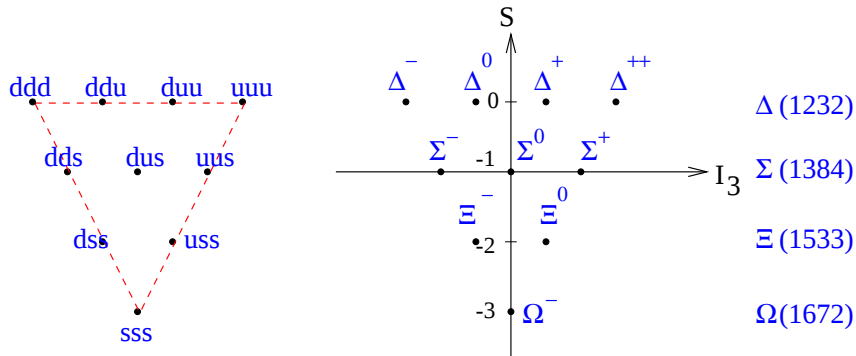
$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$$

Aggiungiamo ora il terzo quark



$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) \\ = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Il Decupletto Barionico



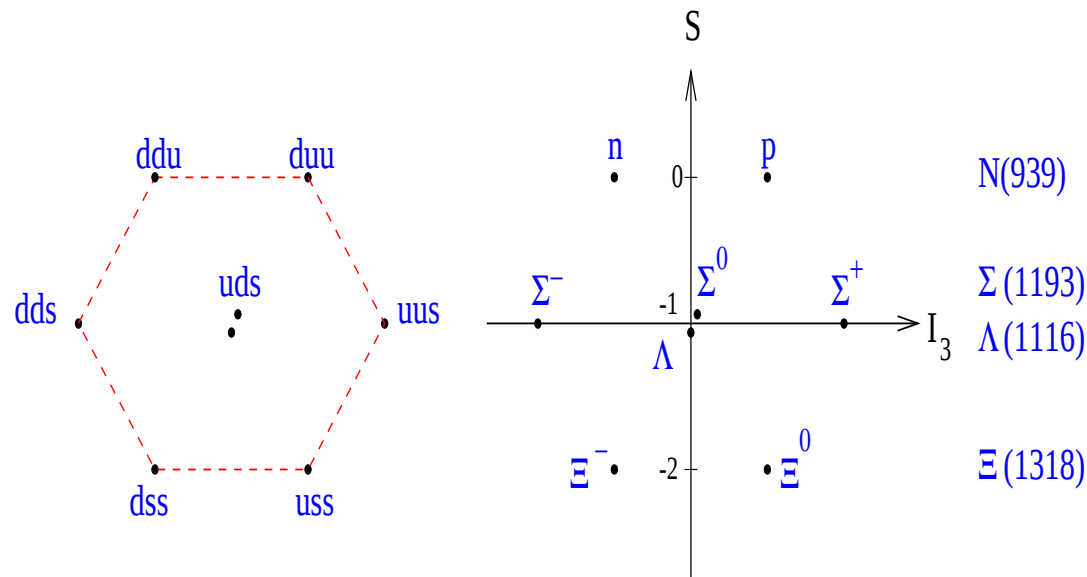
- Hanno **spin-parità** $J^P = \frac{3}{2}^{+}$
- La **funzione d'onda è simmetrica** rispetto allo scambio di una qualsiasi coppia di quark.
- Si trovano in **onda s**, hanno **spin paralleli**, quindi anche le funzioni d'onda spaziale e di spin sono simmetriche.

Principio di Pauli ? La soluzione sta nel fatto che i quark hanno un ulteriore grado di libertà interno, il **colore**, che può assumere i 3 valori **R, G, B**. I quark formano il tripletto fondamentale di una simmetria SU(3) di colore.

Gli adroni sono **neutri** dal punto di vista del colore, cioè appartengono a una rappresentazione di **singoletto di SU(3) di colore**. In questo modo la funzione d'onda è antisimmetrica.

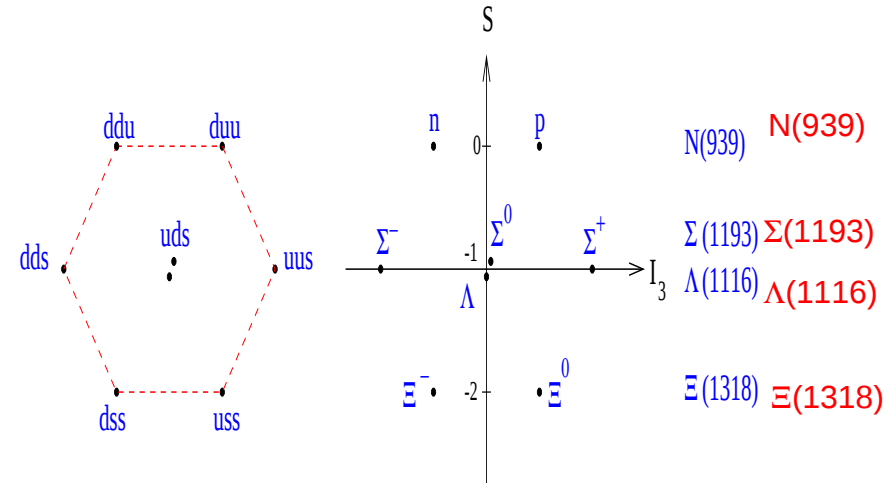
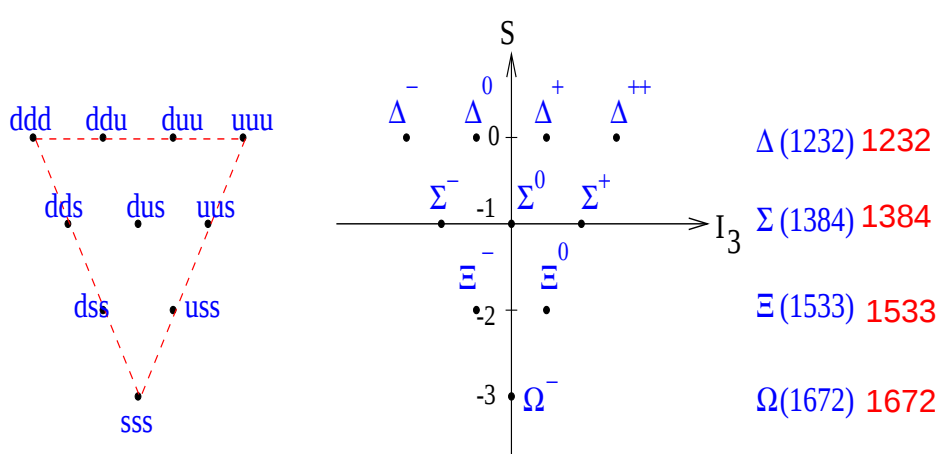
$$(qqq)_{c.s.} = \sqrt{\frac{1}{6}}(RGB - RBG + BRG - BGR + GBR - GRB)$$

L'Ottetto Barionico



$$J^P = \frac{1}{2}^+$$

Gli stati dell'ottetto sono completamente simmetrici rispetto allo scambio simultaneo del flavor e dello spin di una qualsiasi coppia di quark.



Se le differenze di massa fossero dovute solo al fatto che il quark s ha massa maggiore di u e d si dovrebbe avere:

$$J^P = \frac{3}{2}^+ \quad \Sigma(1384) - \Delta(1232) = \Xi(1533) - \Sigma(1384) = \Omega(1672) - \Xi(1533)$$

152 MeV
 149 MeV
 139 MeV

$$J^P = \frac{1}{2}^+ \quad \Sigma(1193) = \Lambda(1116)$$

$$\Lambda(1116) - N(939) = \Xi(1318) - \Lambda(1116)$$

152 MeV
 149 MeV

L'ordine di grandezza è corretto, ma le discrepanze sono abbastanza consistenti. Una comprensione quantitativa delle masse degli adroni deve tener conto degli effetti di **splitting iperfine** nell'interazione fra quark.

Masse degli Adroni

Se la simmetria SU(3) di flavor fosse esatta tutti i membri di un dato multipletto dovrebbero avere la stessa massa. Invece non è così.

$$m_{\omega} \approx m_{\rho}(u\bar{u}) = 0.78 \text{ GeV}$$

$$m_{\phi}(s\bar{s}) = 1.02 \text{ GeV} \quad J^P = 1^-$$

$$m_{K^*}(s\bar{u}) = 0.89 \text{ GeV}$$

Se consideriamo la massa degli adroni come somma delle masse dei costituenti otteniamo:

$$m_u \approx m_d \approx 0.39 \text{ GeV} \quad \text{Masse effettive dei quark legati}$$
$$m_s \approx 0.51 \text{ GeV} \quad \text{negli adroni. Constituent masses.}$$

Rimangono però dei problemi:

$$m_{\Delta}(J = \frac{3}{2}) > m_N(J = \frac{1}{2})$$

$$m_{\rho}(J = 1) > m_{\pi}(J = 0)$$

Δ e N contengono gli stessi quark, come pure π e ρ .

Poichè le masse degli adroni non sono spiegabili solo in termini delle masse dei quark costituenti è necessario considerare l'effetto dell'interazione tra quark. Nell'atomo di idrogeno l'interazione **spin-spin** porta alla **struttura iperfine** dei livelli. Per due fermioni puntiformi di momenti magnetici $\vec{\mu}_i$ e $\vec{\mu}_j$ l'energia di interazione è $\propto \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mu}_j}{r_{ij}^3}$

Dalla teoria di Dirac: $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma}$

La separazione iperfine è data da:

$$\begin{aligned} \Delta E_{hf} &= -\frac{2}{3} \vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 |\psi(0)|^2 \\ &= \frac{2\pi\alpha}{3} \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{m_1 m_2} |\psi(0)|^2 \end{aligned}$$

È un'interazione di contatto: contiene il quadrato della funzione d'onda a zero separazione e quindi si applica solo agli stati $L=0$.

Per i quark l'interazione magnetica associata alle cariche e agli spin è dell'ordine del MeV. I quark, però, interagiscono anche attraverso le cariche di colore con un potenziale del tipo:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr$$

A piccole distanze domina il termine in $1/r$ e α_s è abbastanza piccola da rendere importante lo splitting iperfine (forte):

$$\Delta E(Q\bar{Q}) = \frac{8\pi\alpha_s}{9m_1m_2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\psi(0)|^2 \quad \Delta E(QQ) = \frac{4\pi\alpha_s}{9m_1m_2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |\psi(0)|^2$$

In questo schema le masse degli adroni sono date da:

$$m(q_1\bar{q}_2) = m_1 + m_2 + \frac{a}{m_1m_2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

$$m(q_1q_2q_3) = m_1 + m_2 + m_3 + \frac{a'}{2} \sum_{i>j} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j}{m_i m_j}$$

Per due quark (oppure per quark-antiquark):

$$\vec{\sigma}_i = 2\vec{s}_i$$

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \frac{1}{2}(\vec{S}^2 - \vec{s}_1^2 - \vec{s}_2^2)$$

Quindi gli autovalori di $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ sono:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 &= 4\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] \\ &= \begin{cases} +1 & S=1 \\ -3 & S=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente per i sistemi di 3 quark:

$$\begin{aligned} \sum \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j &= 4 \sum \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = 2[S(S+1) - 3s(s+1)] \\ &= \begin{cases} +3 & S = \frac{3}{2} \\ -3 & S = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



$$m_{\pi} = m_u + m_d - \frac{3a}{m_u m_d} \quad (S=0)$$

$$m_{K^*} = m_u + m_s + \frac{a}{m_u m_s} \quad (S=1)$$

$$(\Delta E)_{\Delta} = +\frac{3}{m_u^2} \frac{a'}{2}$$

$$(\Delta E)_N = -\frac{3}{m_u^2} \frac{a'}{2}$$

Usando i valori misurati delle masse si può fare un **fit** alle costanti m_u , m_d , m_s , a ed a' . Si ottiene:

$$\begin{aligned} m_u = m_d &= 363 \text{ MeV} & \frac{a'}{m_u^2} &= 100 \text{ MeV} \\ m_s &= 538 \text{ MeV} & \frac{a}{m_u^2} &= 160 \text{ MeV} \end{aligned}$$

In questo modo l'accordo con i dati sperimentali è dell'ordine dell'1 % o migliore.

Differenze di Massa Elettromagnetiche

In aggiunta alla massa discussa finora (massa dei quark costituenti, energia di interazione forte) un contributo alla massa degli adroni viene dall'interazione elettromagnetica.

Se per esempio prendiamo i barioni dell'ottetto e assumiamo che le distribuzioni di carica siano simili ci aspettiamo che i *contributi elettromagnetici* Δm siano simili:

$$p(uud) \quad \Delta m_p = \Delta m_{\Sigma^+} \quad \Sigma^+(uus)$$

$$\Sigma^-(dds) \quad \Delta m_{\Sigma^-} = \Delta m_{\Xi^-} \quad \Xi^-(dss)$$

$$\Xi^0(uss) \quad \Delta m_{\Xi^0} = \Delta m_n \quad n(udd)$$

Se aggiungiamo le masse "nude" e sommiamo:

$$m_p + m_{\Sigma^-} + m_{\Xi^0} = m_{\Sigma^+} + m_{\Xi^-} + m_n \quad (m_p - m_n) = (m_{\Sigma^+} - m_{\Sigma^-}) + (m_{\Xi^-} - m_{\Xi^0})$$

$$\begin{array}{ccc} -1.3 \text{ MeV} & -8 \text{ MeV} & +6.4 \text{ MeV} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & & -1.6 \text{ MeV} \end{array}$$

Coleman-Glashow. Le differenze di massa sono associate alla rottura della simmetria di isospin.

Le differenze di massa elettromagnetiche sono dovute a tre effetti:

- Differenze di massa fra i quark u e d ; dal fatto che $m_n > m_p$ ci si aspetta $m_d > m_u$.
- Energia di interazione coulombiana tra coppie di quark, dell'ordine di

$$\frac{e^2}{R_0} \approx 2 \text{ MeV}$$

- Energia di interazione magnetica tra coppie di quark, dell'ordine di

$$\left(\frac{e\hbar}{mc} \right)^2 \frac{1}{R_0^3} \approx 1 - 2 \text{ MeV}$$

Facendo un fit ai dati si ottiene:

$$m_d - m_u = 2 \text{ MeV}$$

La simmetria (approssimata) di isospin è dunque da associarsi al fatto che i quark u e d hanno massa circa uguale.

Momenti Magnetici dei Barioni

I momenti magnetici dei barioni si calcolano come somma vettoriale dei momenti magnetici dei quark costituenti.

Per una particella puntiforme di Dirac di massa m e carica e :

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{\sigma}$$

Calcoliamo per esempio il momento magnetico del protone (uud). I due u sono in uno stato di tripletto di spin; combinando con un ulteriore $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ si ha:

$$\psi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \chi(1,1) \phi(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}_{\mu_u + \mu_u - \mu_d} - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{3}} \chi(1,0) \phi(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}_{\mu_u - \mu_u + \mu_d}$$

$$\mu_p = \frac{2}{3}(2\mu_u - \mu_d) + \frac{1}{3}\mu_d \qquad \mu_p = \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$$

$$\mu_p = 2.79 \frac{e}{2m_p}$$

Confronto tra i momenti magnetici previsti e misurati per alcuni barioni:

		<i>th</i>	exp
p	$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$	2.79	2.793
n	$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u$	-1.86	-1.913
Λ	μ_s	-0.58	-0.614
Σ^+	$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_s$	2.68	2.33
Σ^-	$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_s$	-1.05	-1.00
Ξ^0	$\frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_u$	-1.40	-1.25
Ξ^-	$\frac{4}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_d$	-0.47	-1.85