Teorie di Gauge

Fenomenologia delle Interazioni Forti

Diego Bettoni

Anno Accademico 2008-09

Invarianza di Gauge

Invarianza di Gauge

- Da dove derivano Lagrangiane o Hamiltoniane ?
- Come sappiamo che una certa interazione descrive un sistema fisico reale ?
- Perchè l'interazione elettromagnetica è dovuta allo scambio di una particella di massa 0 e spin 1, il fotone ?

Queste domande trovano risposte adeguate nel contesto delle teorie di gauge.

In queste teorie la struttura dell'interazione è determinata dalle proprietà di invarianza sotto certe trasformazioni.

Elettrodinamica Classica

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad A^{\mu} = (V; \vec{A})$$

$$V \to V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad A^{\mu} \to A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi$$

Trasformazioni di gauge

Invarianza di Gauge in Teoria Quantistica

Poichè le osservabili dipendono da $|\Psi|^2$ possiamo richiedere che la teoria sia invariante sotto la trasformazione:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-i\alpha}\Psi$$

con α costante. Trasformazione di gauge globale.

$$\Psi(\vec{x},t) \rightarrow \Psi'(\vec{x},t) = e^{-i\chi(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t)$$

Questa invece è una trasformazione di gauge locale.

$$-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x},t)=i\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t}$$

L'equazione di Schrödinger non è invariante per trasformazioni di gauge locali

Per particelle cariche elettricamente in presenza di un campo elettromagnetico:

$$\frac{1}{2m}\left(-i\vec{\nabla}+e\vec{A}\right)^2\Psi(\vec{x},t)=\left(i\frac{\partial}{\partial t}+eV\right)\Psi(\vec{x},t)$$

Questa equazione è invariante per le trasformazioni simultanee:

$$\Psi(\vec{x},t)\rightarrow\Psi'=e^{-i\chi(\vec{x},t)}\Psi(\vec{x},t)$$

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\frac{1}{e}\vec{\nabla}\chi$$

$$V\rightarrow V'=V-\frac{1}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

- L'invarianza di gauge locale richiede la presenza di un campo vettoriale A^{μ}.
- Poichè nell'espressione del campo compaiono operatori di creazione e distruzione di particelle ci deve essere una particella associata di spin 1 (perchè il campo è vettoriale).
- Poichè lo stesso effetto si verifica per ogni particella carica l'interazione di questa nuova particella (il fotone) è universale.
- L'invarianza di gauge locale della teoria delle particelle cariche richiede l'esistenza del fotone e dell'interazione elettromagnetica !
- Questo fatto ci permetterà di scrivere la lagrangiana di interazione.
- Tuttavia non sappiamo per quali trasformazioni di gauge la teoria deve essere invariante.
- Alternativamente: non possiamo distinguere tra l'effetto di un cambiamento locale di fase e la presenza di un nuovo campo vettoriale.

Derivata Covariante

$$\vec{\mathcal{D}} = -\vec{\nabla} - ie\vec{A}$$

$$\mathcal{D}^o = \frac{\partial}{\partial t} - ieV$$

$$\frac{1}{2m}\left(i\vec{\mathcal{D}}\right)^2 \Psi = i\mathcal{D}^o \Psi$$

$$\begin{aligned} -i\vec{\mathcal{D}}'\Psi' &= -i(-\vec{\nabla} - ie\vec{A} - i\vec{\nabla}\chi)e^{-i\chi}\Psi \\ &= e^{-i\chi}(-\vec{\nabla} - ie\vec{A})\Psi \\ &= e^{-i\chi}\left(-i\vec{\mathcal{D}}\Psi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\mathcal{D}^{o\,'}\Psi' &= -i\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieV + i\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)e^{-i\chi}\Psi \\ &= e^{-i\chi}\left(-i\mathcal{D}^o\Psi\right) \end{aligned}$$

$\mathcal{D}^\mu = \left(\mathcal{D}^o ; \vec{\mathcal{D}}\right)$ Derivata Covariante

$\mathcal{D}^\mu\psi$ si trasforma come una funzione d'onda. Ogni equazione scritta in termini di $\mathcal{D}^\mu$ è automaticamente gauge-invariante. Ripetute applicazioni di $\mathcal{D}^\mu$ mantengono l'invarianza di gauge.

Caso Generale

Supponiamo di richiedere invarianza della teoria per una generica trasformazione U.

$$\Psi' = U\Psi$$

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - igA^\mu$$

$$\mathcal{D}'^\mu \Psi' = U\left(\mathcal{D}^\mu \Psi\right)$$

$$\left(\partial^\mu - igA^{\mu\,\prime}\right) U\Psi = U\left(\partial^\mu - igA^\mu\right)\Psi$$

$$-igA^{\mu\,\prime} U\Psi = -\partial^\mu (U\Psi) + U\partial^\mu \Psi - igUA^\mu \Psi$$

$$= -\left(\partial^\mu U\right)\Psi - igUA^\mu \Psi$$

$$A^{\mu\,\prime} = -\frac{i}{g}\left(\partial^\mu U\right)U^{-1} + UA^\mu U^{-1}$$

Teorie di Gauge non Abeliane

Isospin Forte

$$m_p = 938.27 MeV \quad m_n = 939.57 MeV$$

$$m_p \approx m_n$$

Heisenberg (1932):

*Protone e neutrone considerati come due stati di carica diversa di una unica particella, il **Nucleone***.

Si introduce un numero quantico, l'**isospin**, conservato nelle interazioni forti, non conservato nelle interazioni elettromagnetiche.

Al nucleone si assegna isospin $I = \frac{1}{2}$

$$I_3 = +\frac{1}{2} \quad p$$

$$I_3 = -\frac{1}{2} \quad n$$

L'interazione forte è invariante per rotazioni nello spazio dell'isospin

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \qquad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{\pm} = \frac{-\pi_1 \pm i\pi_2}{\sqrt{2}}$$

$$\pi^0 = \pi_3$$

†

Scriviamo la lagrangiana per l'interazione forte πN.

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_{pn}\, p^{\dagger} n \pi^{+} + g_{np}\, n^{\dagger} p \pi^{-} + g_{pp}\, p^{\dagger} p \pi^{0} + g_{nn}\, n^{\dagger} n \pi^{0}$$

$p^{\dagger}$ crea un protone o distrugge un antiprotone
π^{+} crea un π^{+} o distrugge un π^{-}.
ecc.

$$p \leftrightarrow n$$

$$g_{pp} = \pm g_{nn}$$

Vogliamo che questa lagrangiana sia invariante per rotazioni nello spazio dell'isospin. Per analogia con lo spin utilizziamo le matrici di Pauli τ per costruire il vettore: $N^{\dagger}\vec{\tau}N$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\left(N^{\dagger}\vec{\tau}N\right)\cdot\vec{\pi}$$

τ_i (i=1,2,3) matrici di Pauli

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\pi} = \tau_1\pi_1 + \tau_2\pi_2 + \tau_3\pi_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\pi_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\pi_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\pi_3$$

$$= \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}$$

$$N^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}N = \begin{pmatrix} p^\dagger & n^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p^\dagger & n^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi^0 p - \sqrt{2}\pi^+ n \\ -\sqrt{2}\pi^- p - \pi^0 n \end{pmatrix}$$

$$= p^\dagger p\pi^0 - \sqrt{2}p^\dagger n\pi^+ - \sqrt{2}n^\dagger p\pi^- - n^\dagger n\pi^0$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g\left(p^\dagger p\pi^0 - \sqrt{2}p^\dagger n\pi^+ - \sqrt{2}n^\dagger p\pi^- - n^\dagger n\pi^0\right)$$

$$g_{pn} : g_{np} : g_{pp} : g_{nn} = 1 : 1 : -1/\sqrt{2} : 1/\sqrt{2}$$

Scriviamo una trasformazione di fase nello spazio dell'isospin ($SU(2)$):

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{\tau}/2} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

$$\tau_i^2 = 1$$

$$\left[\tau_i, \tau_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k$$ **Trasformazioni non abeliane (non commutano)**

in $SU(3)$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda}/2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$$

- Non c'è alcun principio teorico che ci dica *a priori* che spazio scegliere.
- Ogni spazio interno nel quale le particelle hanno numeri quantici non banali dà origine a un'interazione mediata da un nuovo set di bosoni di gauge.
- A momento $SU(3)_{\text{colore}} \times [SU(2) \times U(1)]_{\text{elettrodebole}}$.

Trasformazioni di Gauge Locale non Abeliane (teorie di Yang-Mills)

$\theta_i(\vec{x},t)$ $\alpha_i(\vec{x},t)$

Come prima, per una particella libera non è possibile avere invarianza di gauge locale. Anche in questo caso si deve definire una derivata covariante:

$$\chi(\vec{x},t) \longrightarrow \begin{cases} \vec{\theta}\cdot\vec{\tau} & SU(2) \\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\lambda} & SU(3) \end{cases}$$

isospin debole

$$\mathcal{D}^{\mu} = \partial^{\mu} - ig_2 \frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}^{\mu}$$

- Il parametro g_2 è una costante di accoppiamento arbitraria che rappresenta l'intensità dell'interazione.
- L'invarianza per trasformazioni di gauge locale richiede l'introduzione dei campi vettoriali W_i^{μ}. Particella di spin 1.
- Equazione matriciale 2×2.

Per determinare come si trasformano i W_i^μ imponiamo che la derivata covariante si trasformi come la funzione d'onda.

$$\mathcal{D}'^\mu \psi' = e^{i\vec{\theta}(\vec{x})\cdot\vec{\tau}/2}\mathcal{D}^\mu\psi$$

$$W_i'^\mu = W_i^\mu + \delta W_i^\mu$$

$$\boxed{\delta W_i^\mu = \frac{1}{g_2}\partial^\mu\theta_i - \varepsilon_{ijk}\theta_j W_k^\mu}$$

- Questa espressione per δW_i^μ contiene due termini:
  - il primo è l'analogo di $\frac{1}{e}\partial^\mu\chi$ per il caso abeliano (*U(1)*) (trasparenza 6)
  - il secondo corrisponde alla trasformazione di un vettore per rotazione.
- Abbiamo scritto queste equazioni (in particolare per la derivata covariante) assumendo che agiscano sulla rappresentazione di doppietto di *SU(2)*. In effetti supponiamo di mettere i fermioni (left-handed) del modello standard in doppietti di *SU(2)* di isospin debole.
- Teoria invariante per trasformazioni in questo spazio di isospin debole.

Forma di $\mathcal{D}^\mu$ per una diversa rappresentazione di *SU(2)*. Se ψ è uno stato di isospin debole *t* con *2t+1* componenti, sia $\vec{T}$ la matrice $(2t+1)\times(2t+1)$ rappresentazione di *SU(2)* in quella base. Si ha:

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - ig_2 \vec{T} \cdot \vec{W}^\mu$$

Per spin ½ : $\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2}$

Forma di $\mathcal{D}^\mu$ per invarianza sotto *SU(n)*. Siano $\vec{F}$ i generatori (vettore a (n^2-1) componenti).

$$\left[F_i, F_j\right] = ic_{ijk} F_k$$

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - ig_n \vec{F} \cdot \vec{G}^\mu$$

SU(3) colore
SU(2) isospin debole

$$\mathcal{D}^{\mu} = \partial^{\mu} - ig_1 \frac{Y}{2} B^{\mu} - ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_i^{\mu} - ig_3 \frac{\lambda_a}{2} G_a^{\mu}$$

$i = 1,2,3$

$a = 1,..,8$

g_1, g_2, g_3 numeri reali arbitrari (costanti di accoppiamento). Una volta fissati in una rappresentazione sono gli stessi per tutte le altre rappresentazioni: per es. misurare g_2 per il decadimento del μ lo fissa anche per le interazioni dei quark.

Y ipercarica $U(1)$ "generatore" di $U(1)$ (numero)

Il campo da introdurre per la simmetria abeliana $U(1)$ è stato chiamato B^{μ} e non A^{μ} perchè a priori non sappiamo che l'invarianza $U(1)$ corrisponda proprio all'elettromagnetismo.

∂^{μ} è un quadrivettore, come tutti gli altri termini.

Questa espressione per $\mathcal{D}^{\mu}$ garantisce l'invarianza di gauge nei tre spazi $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ ed implica l'esistenza dei bosoni di gauge di spin 1 corrispondenti ai campi B (1) , W (3) e G (8). Tutti questi bosoni sono stati osservati sperimentalmente.