

Grande Unificazione

Fenomenologia delle Interazioni Elettrodeboli

Diego Bettoni

Anno Accademico 2008-09

Introduzione

- Un modo per estendere il modello standard è di tentare ulteriori unificazioni.
- E' possibile costruire modelli che unificano quark e leptoni e allo stesso tempo unificano le forze forte ed elettrodebole.
- Queste teorie sono chiamate GUT = Grand Unified Theories.
- Alcune di queste teorie sono compatibili con i dati, ma nessuna è emersa come LA teoria di grande unificazione.
- In questa lezione tratteremo il modello basato sul gruppo di simmetria $SU(5)$ come esempio di questo tipo di teorie.

Unificazione di Quark e Leptoni

Per unificare quark e leptoni si mettono in rappresentazioni di gruppi di simmetria più grandi. Questo si può fare in vari modi. Il più semplice è di partire dal gruppo $SU(5)$, le cui rappresentazioni di base sono oggetti a 5 componenti.

$$\left(\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_r \\ \bar{d}_q \\ \bar{d}_b \end{pmatrix} \right)_L$$

- I primi due sono il doppietto di $SU(2)_L$.
- Gli altri tre rappresentano il tripletto di colore $\bar{d}_L$. Deve essere $\bar{d}_L$ perchè c'è bisogno di un singoletto di $SU(2)$ e il momento angolare deve commutare con questa simmetria interna.
- Gli operatori di salita e discesa che fanno salire e scendere in questo multipletto non devono cambiare la proiezione di spin.

I generatori delle rappresentazioni di $SU(n)$ sono a traccia nulla.

Per i generatori diagonali la traccia è la somma degli autovalori, che quindi deve essere nulla (esempio: J_z).

Vogliamo che le invarianze $SU(2)$ e $U(1)$ siano parte dell'invarianza $SU(5)$.

La carica elettrica è una combinazione lineare dei generatori di $SU(2)$ e $U(1)$:

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$$

Di conseguenza vogliamo che la somma degli autovalori della carica elettrica sia nulla:

$$Q(\nu_e) + Q(e^-) + 3Q(\bar{d}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(\bar{d}) = \frac{1}{3}}$$

Unificazione delle forze

$$\frac{1}{\alpha_i(M^2)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu^2)} + \frac{b_i}{4\pi} \ln \frac{M^2}{\mu^2}$$

$$b_3 = 11 - \frac{4n_F}{3}$$

$$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4n_F}{3}$$

n_F numero di famiglie con $M_F < M$

Normalizzazione dell'ipercarica (Y) di $U(1)$.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad \alpha_1 = \frac{g_1^2}{4\pi} \quad g_1 = \frac{e}{\cos \theta}$$

$$\alpha'_1 = \frac{5}{3} \alpha_1$$

Accoppiamento con la corretta normalizzazione per $SU(5)$.

$$b'_1 = -\frac{4n_F}{3}$$

$$\alpha_5 = \alpha_1'(M_G^2) = \alpha_2(M_G^2) = \alpha_3(M_G^2)$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} + \frac{b_2}{4\pi} \ln \frac{M_G^2}{\mu^2} = \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)} + \frac{b_3}{4\pi} \ln \frac{M_G^2}{\mu^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)} = 2 \frac{b_3 - b_2}{4\pi} \ln \frac{M_G}{\mu}$$

$$b_3 - b_2 = 11 - \frac{22}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\ln \frac{M_G}{\mu} = \frac{6\pi}{11} \left(\frac{1}{\alpha_2(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_3(\mu^2)} \right)$$

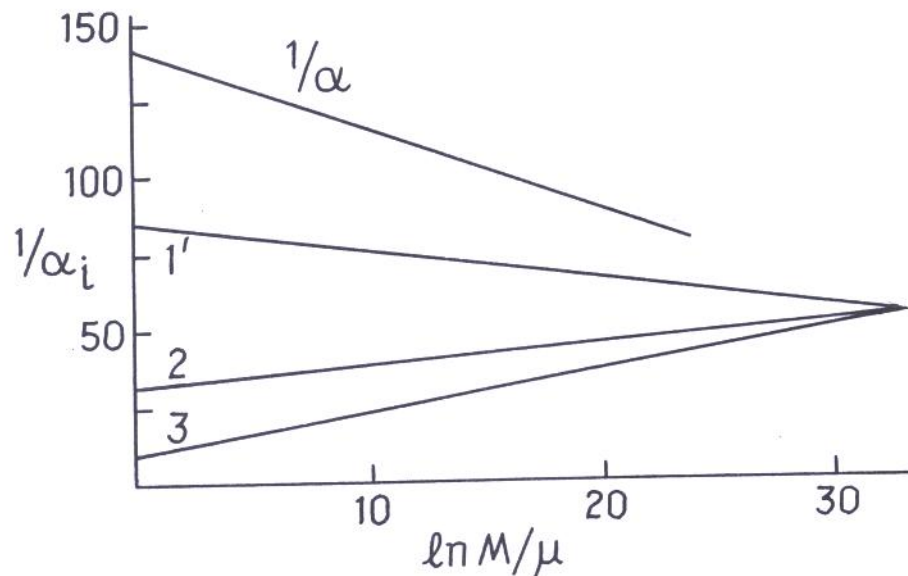
Questa equazione è indipendente da μ in linea di principio.

$$\mu = 10 \text{ GeV} \quad \alpha_2(\mu^2) = \frac{1}{30} \quad \alpha_3(\mu^2) = 0.10$$

$$\ln \frac{M_G}{M_W} \approx 34.25 \quad M_G \approx 7.5 \times 10^{15} \text{ GeV}$$

Includendo altri effetti (bosone di Higgs, effetti di soglia etc.) il valore che si trova è compatibile con α_1 :

$$M_G = (3.6 \pm 3) \times 10^{14} \text{ GeV}$$



Calcolo di $\sin^2 \theta_W$

- Se $SU(2)$ e $U(1)$ sono sottogruppi di un gruppo più ampio il rapporto tra gli accoppiamenti g_1 e g_2 è determinato, quindi l'angolo θ_W non è più un parametro libero, ma si può calcolare .
- Poichè θ_W è misurato con precisione rappresenta un forte vincolo per ogni modello GUT.
- La simmetria determina $\sin^2 \theta_W$ alla scala M_G (dove è valida).
- Dobbiamo poi determinarne l'evoluzione con q^2 per calcolarlo alla nostra scala di energia.

Partiamo scrivendo la carica elettrica in termini dei generatori di $SU(5)$:

$$Q = T_3 + cT_1$$

T_3 è il generatore diagonale di $SU(2)$, T_1 quello di $U(1)$, c una costante.

Derivata covariante in $SU(5)$:

$$\partial^\mu - ig_5 T_a V_a^\mu = \partial^\mu - ig_5 (T_3 W_3^\mu + T_1 B^\mu + \dots)$$

V_a^μ sono i bosoni di gauge di $SU(5)$.

usando: $B^\mu = A^\mu \cos \theta_W + Z^\mu \sin \theta_W$

$$W_3^\mu = -A^\mu \sin \theta_W + Z^\mu \cos \theta_W$$

Dalla derivata covariante otteniamo il coefficiente di A_μ :

$$\begin{aligned} & -g_5 T_3 \sin \theta_W + g_5 T_1 \cos \theta_W \\ & = -g_5 \sin \theta_W (T_3 - T_1 \cot \theta_W) \\ & = eQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= g_5 \sin \theta_W \\ c &= -\cot \theta_W \end{aligned}$$

Calcoliamo c dalle proprietà di $SU(5)$.

Teorema: per ogni rappresentazione R di un gruppo:

$$\text{Tr}_R T_a T_b = N_R \delta_{ab}$$

Esempio, momento angolare: $\text{Tr} J_x^2 = \text{Tr} J_y^2 = \text{Tr} J_z^2$ $\text{Tr} J_x J_y = 0$

Esempio, spin $\frac{1}{2}$: $\text{Tr}_{1/2} J_i^2 = \frac{1}{2}$ $\text{Tr}_1 J_i^2 = 2$

Esempio, spin 1: $N_{1/2} = \frac{1}{2}$ $N_1 = 2$

Applichiamo il teorema a Q^2 :

$$\begin{aligned} \text{Tr} Q^2 &= \text{Tr}(T_3 + cT_1)^2 = \text{Tr} T_3^2 + c^2 \text{Tr} T_1^2 \\ \text{Tr} T_3 T_1 &= 0 \quad \text{Tr} T_1^2 = \text{Tr} T_3^2 \end{aligned}$$

$$1 + c^2 = \frac{\text{Tr} Q^2}{\text{Tr} T_3^2}$$

Per la rappresentazione 5 di $SU(5)$:

$$\text{Tr } Q^2 = 0 + 1 + 3\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{Tr } T_3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$$

$$1 + c^2 = \frac{8}{3}$$

$$\sin^2 \theta_W = \frac{1}{1 + c^2} = \frac{3}{8} \quad \text{alla scala di grande unificazione}$$

Questa predizione non si può ovviamente confrontare con l'esperimento, perchè è valida alla scala di grande unificazione, mentre a energie più basse la simmetria $SU(5)$ è rotta.

La Lagrangiana del modello standard contiene un termine:

$$g_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{Y}{2} \psi B_\mu \quad \xrightarrow{Q = T_3 + \frac{Y}{2}} \quad g_1 \bar{\psi} \gamma^\mu (Q - T_3) \psi B_\mu$$

Sostituendo nella derivata covariante: $T_1 = \frac{Q - T_3}{c}$

otteniamo:

$$\frac{1}{c} g_5 \bar{\psi} \gamma^\mu (Q - T_3) \psi B_\mu$$

Confrontando termine a termine:

$$\begin{cases} g_5 = c g_1 \\ \alpha_5 = c^2 \alpha_1 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_5}{c^2} \quad \alpha_2 = \alpha_5$$

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Questa equazione permette di valutare $\sin^2 \theta_W$ in funzione di q^2 .

$$\alpha_1(M_W^2) \approx 0.010$$

$$\alpha_2(M_W^2) = \alpha_5 0.032$$

$$\sin^2 \theta_W \approx \frac{1}{1 + \frac{0.032}{0.010}} \approx 0.23 \quad \text{alla scala elettrodebole}$$

$$\alpha_2(M_G^2) = \frac{\alpha(M_G^2)}{\sin^2 \theta_W(M_G^2)}$$

$$\alpha_1'(M_G^2) = \frac{5\alpha(M_G^2)}{3\cos^2 \theta_W(M_G^2)} = \frac{5}{3}\alpha_1(M_G^2)$$

Il motivo per cui $\sin^2 \theta_W$ cambia, vale a dire gli accoppiamenti cambiano in modo diverso, è che dei 24 bosoni di gauge di $SU(5)$ (5^2-1) solo 12 sono osservati (8 gluoni, $W^\pm$, Z^0 , γ) gli altri devono essere pesanti e, al crescere di q^2 , non contribuiscono più ai loop. Siccome le forze hanno intensità diverse, i contributi al loop che perdono importanza hanno valori numerici differenti per α_1 , α_2 , α_3 .

Il valore numerico di $\sin^2 \theta_W$ rappresenta un vincolo molto forte per le teorie di grande unificazione.

Il modello basato su $SU(5)$ non è l'unico che predice il valore corretto di $\sin^2 \theta_W$.

Decadimento del Protone

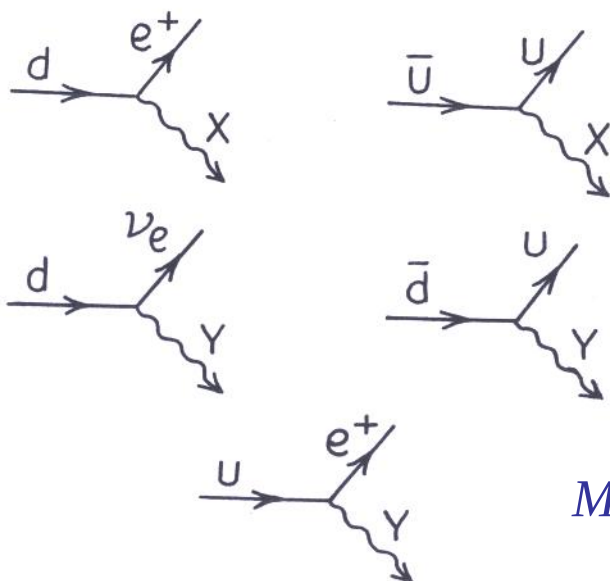
Alcuni dei bosoni di gauge di SU(5) possono dare luogo a transizioni all'interno dei multipletti, per esempio quark $\rightarrow$ leptone. Questo implica che il protone può decadere e il numero barionico non viene conservato.

Il colore e la carica elettrica continuano a rimanere quantità conservate, perchè i rispettivi gruppi di simmetria fanno parte della simmetria SU(5).

$$\begin{array}{l}
 SU(2) \quad 2 \times \bar{2} = 1 + 3 \\
 SU(3) \quad 3 \times \bar{3} = 1 + 8 \\
 SU(5) \quad 5 \times \bar{5} = 1 + 24 \\
 5 \supset (2,1) + (1,3) \\
 \bar{5} \supset (\bar{2},1) + (1,\bar{3}) \\
 5 \times \bar{5} \supset (2 \times \bar{2},1) + (1,3 \times \bar{3}) + (2,\bar{3}) + (\bar{2},3) \\
 (1,1) + (3,1) + (1,1) + (1,8) + (2,\bar{3}) + (\bar{2},3)
 \end{array}$$

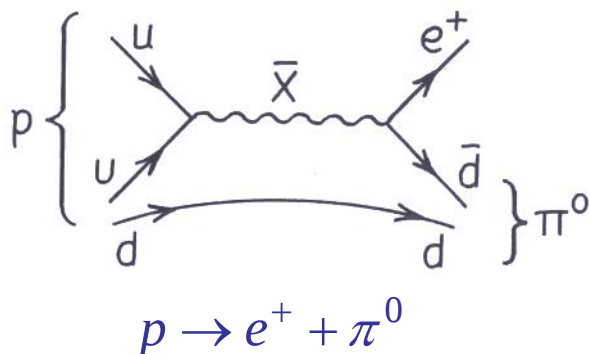
$(SU(2), SU(3))$
 $\left(\begin{array}{c} Y^\alpha \\ X^\alpha \end{array} \right)$
 $Q_Y = -1/3$
 $Q_X = -4/3$

W_μ^i, B_μ g



$$\Gamma_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \approx \frac{\alpha_5^2 M_p^5}{M_G^4}$$

$$M_G = 3.6 \times 10^{14} \text{ GeV} \rightarrow \tau_p \approx 3.6 \times 10^{38} \text{ s} \approx 10^{31} \text{ anni}$$



- Le stime sono dell'ordine di 10^{31} anni.
- Si utilizzano enormi serbatoi d'acqua.
- Si rivelano i fotoni dal decadimento del pione e la luce Čerenkov dell' e^+ .
- Necessaria grande purezza dell'acqua.
- Fondi da raggi cosmici.
- Limite attuale è di circa 10^{32} anni.