Sistemi di assi coordinati

Un problema, che presenti una simmetria cilindrica, o sferica, può anche essere espresso, e risolto, nel familiare sistema cartesiano ortogonale. La soluzione non conserverebbe però la simmetria e sarebbe inutilmente complessa.

Nelle derivazioni teoriche e nei problemi si utilizzano anche coordinate polari cilindriche o sferiche a seconda della simmetria del caso. Vediamo tutti e tre i sistemi di assi coordinati nella Fig. 1.

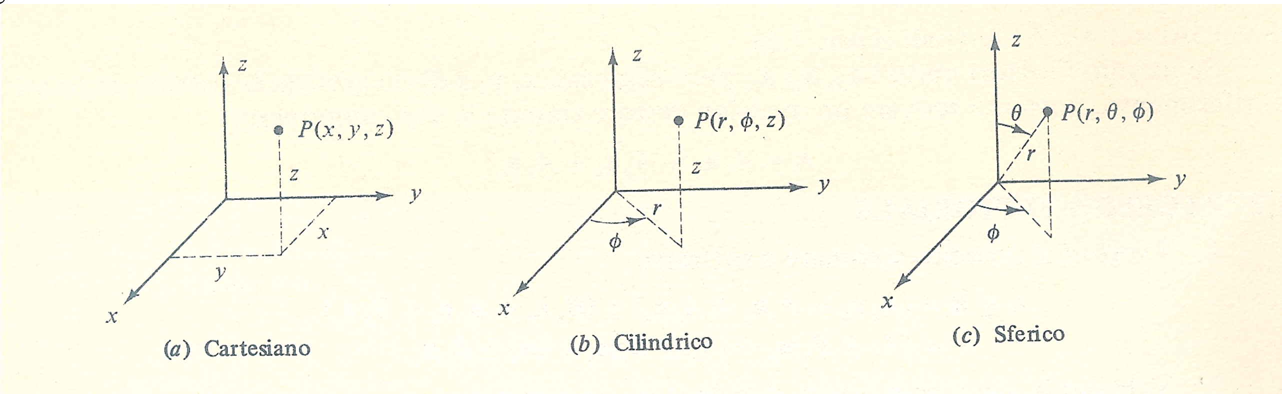


Figura 1. Sistemi di assi coordinati: a) Cartesiano, b) Cilindrico e c) Sferico, con le rispettive coordinate.

Un punto P nello spazio viene descritto da tre coordinate sia nel sistema cartesiano (x, y, z), che in quello cilindrico (r, φ, z), nonché in quello sferico (r, θ, φ).

L'ordine di presentazione è rigoroso e va rispettato. L'angolo φ è lo stesso, sia nel sistema cilindrico, che in quello sferico. Però nel primo appare in seconda posizione (r, φ, z), nel secondo in terza (r, θ, φ). Il simbolo r è usato, sia nelle coordinate cilindriche, che in quelle sferiche, sebbene abbia un significato diverso.

Nelle coordinate cilindriche r misura la distanza dall'asse delle z su un piano normale a z e passante per il punto P.

Nelle coordinate sferiche, invece, esso dà la distanza tra il punto P e l'origine O.

Un punto risulta dato anche dall'intersezione di tre superfici ortogonali, come riportato in Fig. 2.

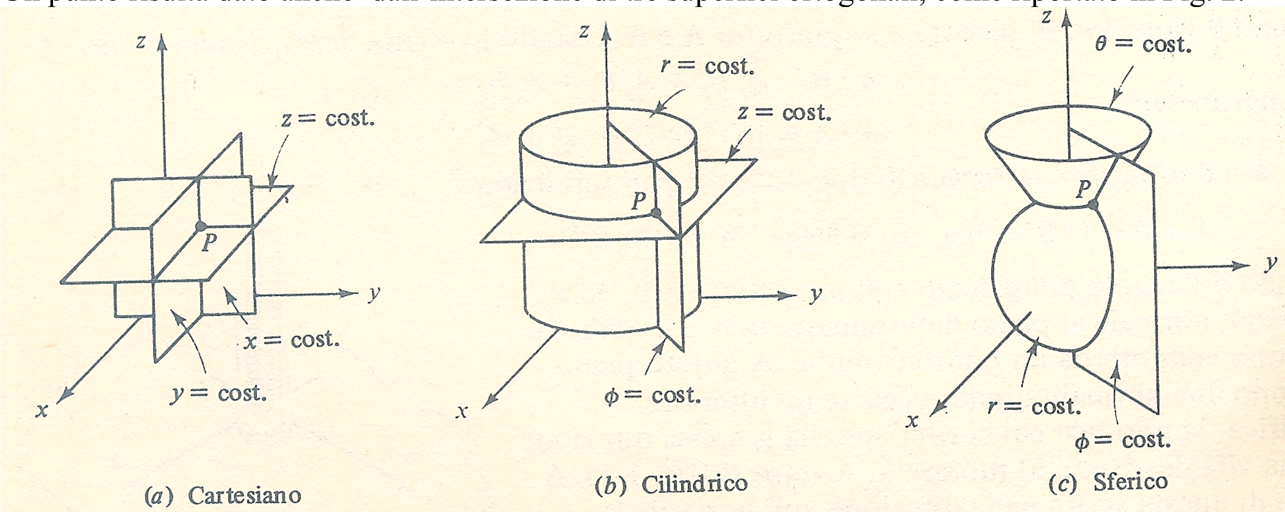


Figura 2. Punto P nei vari sistemi di assi cartesiani, individuato dall'intersezione di tre superfici, individuate dai valori costanti delle rispettive coordinate.

In coordinate cartesiane sono i piani infiniti x = costante (cost.), y = cost. e z = cost. .

In coordinate cilindriche z = cost. è lo stesso piano delle coordinate cartesiane, φ = cost. è un semipiano, il cui bordo coincide con l'asse z; r = cost. è un cilindro circolare retto. Queste tre superfici sono ortogonali e la loro intersezione individua il punto P.

Per le coordinate sferiche φ= cost. è lo stesso semipiano delle coordinate cilindriche, r = cost. è una superficie sferica con centro nell'orgine; θ = cost. è un cono circolare retto con asse coincidente con l'asse z e vertice nell'origine. Notare che θ è limitato all'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Possiamo quindi individuare i versori relativi ad ogni sistema di assi coordinati come indicato in Fig. 3.

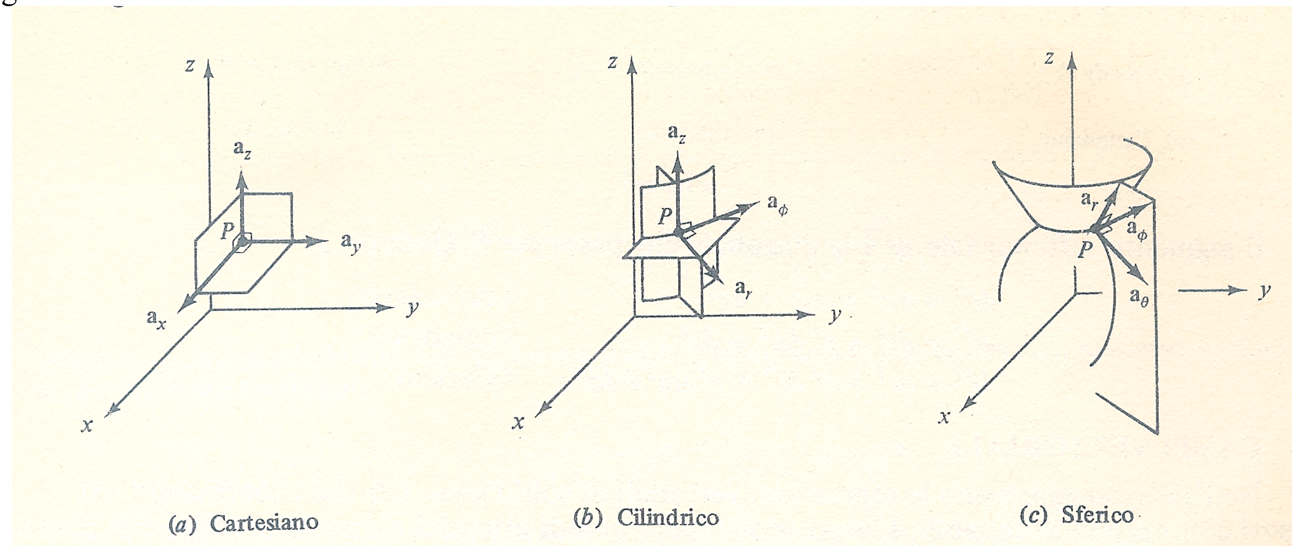


Figura 3. Versori dei vari sistemi di assi coordinati.

Nel sistema cartesiano i tre versori hanno direzioni fisse indipendenti dalla collocazione di P.

Invece per le coordinate cilindriche questo non vale (i versori dipendono dalla posizione di P, per questo sono detti anche *sistemi locali*).

Per tutti e tre i sistemi ogni versore è normale alla sua superficie coordinata, ed è nella direzione in cui la coordinata aumenta, inoltre:

$$\boldsymbol{a_x} \wedge \boldsymbol{a_y} = \boldsymbol{a_z}, \quad \boldsymbol{a_y} \wedge \boldsymbol{a_z} = \boldsymbol{a_x} \text{ e } \boldsymbol{a_z} \wedge \boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{a_y};$$

$$\boldsymbol{a_x} \bullet \boldsymbol{a_y} = \boldsymbol{a_y} \bullet \boldsymbol{a_z} = \boldsymbol{a_z} \bullet \boldsymbol{a_x} = 0 \text{ e } \boldsymbol{a_x} \bullet \boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{a_y} \bullet \boldsymbol{a_y} = \boldsymbol{a_z} \bullet \boldsymbol{a_z} = 1 \;;$$

ovvero risulta una base vettoriale ortonormale.

Stessa cosa vale per i versori della rappresentazione polare cilindrica:

$$\boldsymbol{a_r} \wedge \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_z}, \quad \boldsymbol{a_\phi} \wedge \boldsymbol{a_z} = \boldsymbol{a_r} \text{ e } \boldsymbol{a_z} \wedge \boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{a_\phi};$$

$$\boldsymbol{a_r} \bullet \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_\phi} \bullet \boldsymbol{a_z} = \boldsymbol{a_z} \bullet \boldsymbol{a_r} = 0 \text{ e } \boldsymbol{a_r} \bullet \boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{a_\phi} \bullet \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_z} \bullet \boldsymbol{a_z} = 1 \,,$$

ovvero risulta una base vettoriale ortonormale.

Ed infine la stessa cosa vale per i versori della rappresentazione polare sferica:

$$\boldsymbol{a_r} \wedge \boldsymbol{a_\theta} = \boldsymbol{a_\phi}, \quad \boldsymbol{a_\theta} \wedge \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_r} \text{ e } \boldsymbol{a_\phi} \wedge \boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{a_\theta};$$

$$\boldsymbol{a_r} \bullet \boldsymbol{a_\theta} = \boldsymbol{a_\theta} \bullet \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_\phi} \bullet \boldsymbol{a_r} = 0 \text{ e } \boldsymbol{a_r} \bullet \boldsymbol{a_r} = \boldsymbol{a_\phi} \bullet \boldsymbol{a_\phi} = \boldsymbol{a_z} \bullet \boldsymbol{a_z} = 1 \text{ e}$$

ovvero risulta una base vettoriale ortonormale.

Tutti e tre i sistemi risultano destrorsi e levogiri.

I versori cartesiani qui riportati come $\boldsymbol{a_x}$, $\boldsymbol{a_y}$, $\boldsymbol{a_z}$ sono anche indicati rispettivamente anche cone

$$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \text{ e } \boldsymbol{k},$$

o

$$\boldsymbol{u_x}, \boldsymbol{u_y} \text{ e } \boldsymbol{u_z}\,.$$

Mentre le rappresentazioni polari sono di solito riportati con

$\boldsymbol{u_r}$, $\boldsymbol{u_\phi}$ e $\boldsymbol{u_z}$, per le coordinate polari cilindriche,

$\boldsymbol{u_r}$, $\boldsymbol{u_\theta}$ e $\boldsymbol{u_\phi}$ per le coordinate polari sferiche,

dove $\boldsymbol{u}$ sta per vettore di modulo uno (versore).

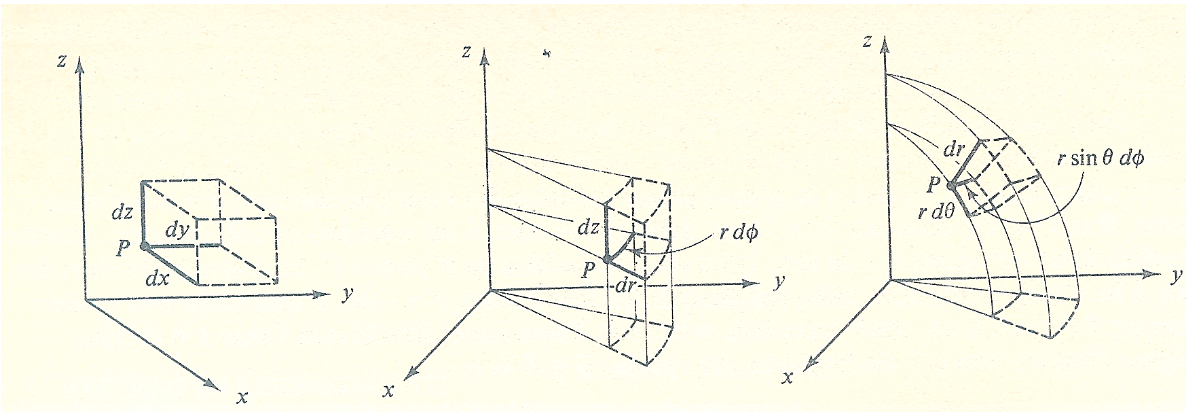
Noi usiamo, in linea con il testo adottato, il simbolo ***u*** per indicare un versore, e di seguito useremo tale simbolo.

Volumi, superfici e segmenti differenziali

Se aumentiamo le coordinate del punto P: raggiungeremo un punto che avrà le coordinate (x + dx, y + dy, z + dz), oppure (r + dr, φ + dφ, z +dz), oppure (r + dr, θ + dθ, φ + dφ), sebbene non riportato nel grafico, nel testo indicheremo questo punto con la lettera Q.

Costruiamo un volumetto differenziale, dv, dove indichiamo con v il volume, nel caso generale il volume (nell'elettromagnetismo useremo per il volume il simbolo τ per evirare confusione con il simbolo V, che viene utilizzato per il potenziale elettrostatico) che avrà come vertici opposti i punti P e Q.

Gli elementi differenziali di volume sono riportati in Fig. 4 per ogni tipo di sistema di assi coordinati.



$dv = dx\,dy\,dz$ $\quad$ $dv = r\,dr\,d\phi\,dz$ $\quad$ $dv = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

(*a*) Cartesiano (*b*) Cilindrico (*c*) Sferico

Si può così calcolare il volume di geometrie, differenti, utilizzando le opportune coordinate a seconda della simmetria.

Dalla stessa figura possiamo ricavare le areole, che delimitano il volume differenziale.

Per esempio se consideriamo le coordinate sferiche l'elemento di superficie differenziale dΣ, perpendicolare a $\boldsymbol{a_r}$ è

$$d\Sigma=(r d\theta)(r \sin\theta\, d\varphi),$$

dal quale, integrando, si ricava, per un dato r fissato, la superficie di porzioni di aree sferiche, o se si integra su tutta la superficie, quanto vale la superficie di guscio sferico di raggio r.

Il segmento differenziale è la diagonale che passa per P fino al vertice opposto del volumetto, che abbiamo indicato con la lettera Q (lettera non riportata nei grafici):

$$(dl)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 \text{ (cartesiano);}$$
$$(dl)^2=(dr)^2+ r^2 (d\varphi)^2 +(dz)^2 \text{ (polare cilindrico)}$$
$$(dl)^2=(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 +r^2 \sin^2\theta \ (d\varphi)^2 \text{ (polare sferico).}$$

Utilizzo delle rappresentazioni per il calcolo del lavoro infinitesimo in uno spostamento *ds*.

Nel caso del calcolo di un integrale di linea per esempio per il lavoro dW=***F•ds*,** si osserva che in coordinate cartesiane il vettore spostamento infinitesimo ***ds*** è deducibile dal segmento differenziale, per il **sistema cartesiano**:

$$d\boldsymbol{s} = dx\, \boldsymbol{a}_x + dy\, \boldsymbol{a}_y + dz\, \boldsymbol{a}_z;$$

dove abbiamo indicato i versori del sistema cartesiano come nel grafico, possiamo anche indicarli rispettivamente ***i, j , k*** ed avremmo quindi d***s***= d*x* ***i*** + d*y* ***j*** + d*z* ***k*** come sul Halliday, Resnick Walker, o anche, $d\boldsymbol{s} = dx\, \boldsymbol{u}_x + dy\, \boldsymbol{u}_y + dz\, \boldsymbol{u}_z$ come sul Mazzoldi, Nigro, Voci.

Potete pensarlo come una variazione infinitesima lungo le tre direzioni, che risulta quindi il vettore lungo la diagonale del volumetto individuato da d*x*, d*y* e d*z*.

La stessa considerazione si può fare per il **sistema polare cilindrico**, quindi uno spostamento qualsiasi può essere visto come la congiungente la diagonale dei vertici opposti nel volumetto infinitesimo corrispondente:

$$d\boldsymbol{s}=dr\, \boldsymbol{a}_r + r d\varphi\, \boldsymbol{a}_\varphi + dz\, \boldsymbol{a}_z,$$

o equivalentemente per il seguito del corso

$$d\boldsymbol{s}=dr\, \boldsymbol{u}_r + r d\varphi\, \boldsymbol{u}_\varphi + dz\, \boldsymbol{u}_z,$$

e quindi rappresentarlo rispetto alle componenti lungo i versori corrispondenti alla rappresentazione cilindrica.

Mentre, sempre considerando la diagonale congiungente il vertice opposto a *P* **per il sistema polare sferico:**

$$d\boldsymbol{s}= dr\, \boldsymbol{a}_r + r d\theta\, \boldsymbol{a}_\theta + r sin\theta d\varphi\, \boldsymbol{a}\varphi \ ,$$

o equivalentemente per il seguito del corso

$$d\boldsymbol{s}= dr\, \boldsymbol{u}_r + r d\theta\, \boldsymbol{u}_\theta + r sin\theta d\varphi\, \boldsymbol{u}\varphi \ .$$

Per calcolare il lavoro di una forza centrale (simmetria sferica) meglio utilizzare un sistema di coordinate sferiche.

I sistemi di riferimento polari saranno di notevole aiuto nel campo dell'elettromagnetismo, perché, a seconda della geometria del problema, risulterà più pratico utilizzare quelli più appropriati sia per il calcolo di distribuzioni di carica, volumiche, superficiali o lineari, sia per il calcolo del campo elettrico nello spazio circostante.