Soluzioni dei problemi o indicazioni

Di seguito sono presentate le soluzioni dei problemi.

Problemi del Capitolo 1

1.1 Il primo membro ha le dimensioni di una lunghezza. I termini del secondo membro devono essere omogenei : $[x]$=$[x_0]$= L; $[v_0 m]$= LT^{-1}M $\neq$ L errato, [5/7 at] = LT^{-2}T= LT^{-1} $\neq$ L errato. L'equazione è errata.

1.2 $[1/\nu']$=$[1/\nu]$= s, $(1-cos\theta)$= adimensionale, $[h/m_e c^2]$ = (J s)/(kg m^2 s^{-2}) = kg m^2 s^{-2} s/(kg m^2 s^{-2})= s. L'equazione è corretta.

1.3 Entrambe le equazioni per l'analisi dimensionale sono corrette. La costante è adimensionale, l'analisi dimensionale è necessaria, ma non è sufficiente.

1.4 L'unica combinazione delle dimensioni, che permette l'uguaglianza tra il primo membro e la somma dei vari termini del secondo membro è tale da avere tutti gli esponenti pari a zero: θ deve essere adimensionale, ed anche la funzione senθ deve essere adimensionale per il criterio di uguaglianza tra primo e secondo membro.

1.5 Per il primo membro f in N, per il secondo membro 2/πR in m^{-1}, in parentesi tonde 1/2 mv^2 in kg m^2 s^{-2} e mgR in kg m s^{-2} m si possono sommare. Le dimensioni del secondo membro sono kg m s^{-2} ovvero N. Equazione corretta.

1.6 Il primo membro ha le dimensioni LT^{-1}, al secondo membro sotto radice $[{v_l}^2]$ = L^{2}T^{-2} e $[2\mu_d g D]$ = LT^{-2}L somma corretta, estraendone la radice si ha LT^{-1}. Equazione corretta.

Problemi del Capitolo 2

2.1 Dalla definizione di valore medio $\bar{x} = \left(\sum_i^n x_i\right)/n$, dato che avremo $n/2$ valori x_1 e $n/2$ valori x_2:

$$\bar{x} = \frac{(n/2)\,x_1 \;+\; (n/2)\,x_2}{n}$$

per $n \to \infty$ si ottiene $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$. Il valore medio è a metà tra i due valori misurati, $\bar{x} - x_1 = \varepsilon_x$, ed $x_2 - \bar{x} = \varepsilon_x$, con $x_2 > x_1$.

Per la deviazione standard del campione dalla definizione $\sigma_x = \sqrt{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2/(n-1)}$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{n/2(x_1-\bar{x})^2 + n/2(x_2-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n/2(-\varepsilon_x)^2 + n/2(\varepsilon_x)^2}{n-1}}$$

per $n \to \infty$ si ottiene $\sigma_x \to \varepsilon_x$: CVD .

2.2 Provare con la calcolatrice, o un foglio elettronico, aumentando il numero di coppie di valori, che differiscano di una unità sulla cifra meno significativa. Per esempio 21 e 22 (o 22.4 e 22.3).

2.3 $v = 2.550$ m s^{-1}: ha quattro cifre significative, lo zero non sarebbe necessario, per cui si riporta, per indicare che è una cifra frutto di arrotondamento.
$x_0 = 250$ mm: in questo caso lo zero serve per indicare le unità, per cui non è evidente se significativo, oppure no.
Come regola gli zeri necessari non saranno ritenuti significativi, quindi il numero è da ritenersi 2.5 10^2 mm: due cifre significative.
$t_1 = 15.0$ s: ha tre cifre significative.
Per la coordinata x in t_1 otteniamo:

$$x(t_1) = x_0 + vt_1 = 2.5\ 10^2\ \text{mm} + 2.550\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} 15.0\ \cancel{\text{s}}\ ,$$

in cui arrotondo il prodotto tra 2.550 e 15.0 al numero di cifre significative minore, ovvero tre: quindi 38.25 diventa 38.3.
Converto mm in m dalla relazione "10^3 mm = 1 m" e quindi:

$$x(t_1) = 2.5\ \cancel{10^2}\ \cancel{\text{mm}}\ \frac{\text{m}}{10^{\cancel{3}\,1}\ \cancel{\text{mm}}} + 38.3\ \text{m} = 0.25\ \text{m} + 38.3\ \text{m} = 38.55.$$

Osserviamo che il secondo termine al secondo membro è stato arrotondato a tre cifre significative, nel risultato finale se ne ottengono quattro, perché dal primo termine a secondo membro si è aggiunta un'altra cifra significativa.

2.4 $a = 7.53$ m s^{-2} ha tre cifre significative,
$t_1 = 0.25$ s ne ha due,
$v_0 = 5.3$ km h^{-1} ne ha due e
$x_0 = 253$ cm ne ha tre .

Dalla relazione $v(t) = v_0 + at$ in t_1:

$$v(t_1) = v_0 + at_1 = 5.3\ \frac{\text{km}}{\text{h}} + 7.53\ \frac{\text{m}}{\text{s}^{\cancel{2}1}}\ 0.25\ \cancel{\text{s}}\ =$$

$$= 5.3\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\ \frac{\cancel{10^3}\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\ \frac{\cancel{\text{h}}}{3.6\cancel{10^3}\ \text{s}} + 1.8825\ \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 1.47\bar{2}\ \text{m s}^{-1} + 1.8825\ \text{m s}^{-1}\ .$$

Abbiamo utilizzato le conversioni “1 km = 10^3 m” e “1 h = 3600 s = 3.6 10^3 s”. Primo e secondo termine nell’ultimo membro sono uniformi nelle unità di misura. Il primo termine deriva da prodotti e frazioni, in cui il numero con meno cifre è 5.3, per cui arrotondiamo a due cifre significative e diventa 1.5.
Il secondo termine deriva dal prodotto tra due numeri, di cui 0.25 contiene meno cifre e sono due, pertanto diventa 1.9.
Il *risultato finale* numerico da fornire:

$$v(t_1) = 1.5\ \text{m s}^{-1} + 1.9\ \text{m s}^{-1} = 3.4\ \text{m s}^{-1}\ .$$

Per $x(t_1)$ utilizziamo la relazione $x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2\ at^2$, calcolata in t_1, e applichiamo le trasformazioni delle unità di misura precedenti, ma anche la conversione “10^2 cm = 1 m”:

$$x(t_1) = 253\ \cancel{\text{cm}}\frac{1\ \text{m}}{10^2\ \cancel{\text{cm}}} + 5.3\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\ \frac{\cancel{10^3}\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\ \frac{\cancel{\text{h}}}{3.6\ \cancel{10^3}\ \cancel{\text{s}}}\ 0.25\ \cancel{\text{s}} + \frac{1}{2}\ 7.53\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}^2}}\ (0.25^2\ \cancel{\text{s}^2}) =$$

$$= 0.253\ \text{m} + 0.37\ \text{m} + 0.24\ \text{m}\ ,$$

dove abbiamo arrotondato, nell’ultimo membro, secondo e terzo termine a sole due cifre significative.

Come risultato finale otteniamo:

$$x(t_1) = 0.863\ \text{m},$$

dove nella somma rispetto al secondo ed al terzo termine, che hanno due cifre significative, con il primo termine si ottiene un’altra cifra significativa.

2.5 Graficamente si dovrebbe osservare, se il valore atteso $g_{att} = 9.807$ m s^{-2} ricade nell’intervallo compreso tra $]g_{ms} - \delta g, g_{ms} + \delta g[$.
Riportiamo qui gli intervalli e se il valore atteso vi è compreso:

a: Il valore 9.807 m s^{-2} è compreso tra 8.9 m s^{-2} – 10.5 m s^{-2}, pertanto non può essere rigettato.
b: Il valore 9.807 m s^{-2} è compreso tra 9.65 m s^{-2} – 9.83 m s^{-2}, pertanto non può essere rigettato.
a: Il valore 9.807 m s^{-2} *non* è compreso tra 9.744 m s^{-2} – 9.754 m s^{-2}, pertanto *può essere rigettato*.

2.6 Il raggio medio dell'atomo ha una mantissa maggiore di 3.16, pertanto risulta ≈E-10 m, mentre il raggio medio del nucleo ha una mantissa minore di 3.16, pertanto risulta ≈E-15 m.
Il raggio dell'atomo è 5 ordini di grandezza maggiore del raggio del nucleo.

2.7 Da $v(t) = v_0 + at$, per maggiore chiarezza etichetto t' = 0.5345 s e t'' = 0.54 s,

$$v(t') = 5.647\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9.807 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}1}}\ 0.5345\ \cancel{\mathrm{s}},$$

dove il secondo termine è da arrotondare a quattro cifre significative:

$$v(t') = 5.647\ \mathrm{m\ s^{-1}} -\ 5.242\ \ \mathrm{m\ s^{-1}} = 0.405\ \mathrm{m\ s^{-1}},$$

dove osserviamo, che rispetto al secondo membro, dove avevamo due termini con quattro cifre significative, nell'ultimo membro per la sottrazione rimangono tre cifre significative.

Per t'' = 0.54 s:

$$v(t'') = 5.647\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9.807 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}1}}\ 0.54\ \cancel{\mathrm{s}}\ ,$$

dove questa volta arrotondo il secondo termine a due cifre significative pertanto:

$$v(t'') = 5.647\ \mathrm{m\ s^{-1}} -\ 5.3\ \ \mathrm{m\ s^{-1}} = 0.347\ \mathrm{m\ s^{-1}}\ .$$

Si osservi come l'arrotondamento in questo caso dia un'incertezza anche sulla cifra più significativa.

Gli studenti dovrebbero fare attenzione alle relazioni funzionali tra le grandezze fisiche, non preoccuparsi troppo se i risultati numerici, non sono coincidenti esattamente. Se i risultato finale è derivato da prodotti o frazioni delle grandezze iniziali fornite nel problema, ci possiamo aspettare che la differenza sia sulla cifra meno significativa. Ma se il risultato finale è frutto di somme o sottrazioni, potrebbero esserci incertezze anche su altre cifre più significative.

Si cerchi sempre di ottenere i risultati, rispetto ai simboli delle grandezze, soprattutto in fase di svolgimento dell'esercizio, piuttosto che rispetto ai valori numerici.

Problemi del Capitolo 3

3.1 $z(t) = 1/2gt^2$, $v_z(t) = gt$ e ovviamente $a_z(t) = g$. Fate i grafici e confrontateli con quelli della rappresentazione con l'asse orientato verso l'alto di Fig. 3.6.
Nel caso di questo problema $z(t)$ aumenta e la concavità di $z(t)$ è verso l'alto; diversamente nel caso dell'asse verso l'alto $z(t)$ diminuisce e la concavità è verso il basso.

In questo caso la velocità è positiva crescente; diversamente nel caso con l'asse verso l'alto è negativa descrescente.
In questo caso l'accelerazione è positiva; diversamente nell'altro caso è negativa.
Questo serva, per rendersi conto come le rappresentazioni possano fornire interpretazioni controverse, legate alla scelta del sistema di assi di riferimento.

3.2 Otteniamo per l'equazione della coordinata z:
$z(t) = z_0 + v_0 t - 1/2\ gt^2$, da cui ottengo dalla $v_z(t) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t = v(t) = v_0 - gt$, ed infine $a_z(t) = \mathrm{d}v_z(t)/\mathrm{d}t = -g$.

Quesito a) Otteniamo $t_{z_{max}}$ dalla velocità $v(t_{z_{max}}) = 0$, pertanto riscrivendo l'equazione della velocità nel punto più in alto, dove deve essere nulla, troviamo la soluzione per il tempo in tale punto:

$$0 = v_0 - gt_{z_{max}}\ ,\ \text{quindi}\ t_{z_{max}} = \frac{v_0}{g}\ , \tag{3.27}$$

che numericamente risulta:

$$t_{z_{max}} = \frac{\cancel{9.8}\,\cancel{\mathrm{m}}\,\cancel{\mathrm{s}^{-1}}}{\cancel{9.8}\,\cancel{\mathrm{m}}\,\mathrm{s}^{\cancel{-2}-1}} = 1.0\ \frac{1}{\mathrm{s}^{-1}} = 1.0\ \frac{1}{\cancel{\mathrm{s}^{-1}}}\ \frac{\mathrm{s}}{\cancel{\mathrm{s}}} = 1.0\ \mathrm{s}.$$

L'altezza massima raggiunta, che etichettiamo z_{max}, la otteniamo, risolvendo l'equazione $z(t)$ in $t_{z_{max}}$, ricavato dalla (3.27):

$$z_{max} = z(t_{z_{max}}) = z(v_o/g) = z_0 + v_0\ \tfrac{v_0}{g} - \tfrac{1}{2} g \left(\tfrac{v_0}{g}\right)^2 = z_0 + \tfrac{1}{2}\ \tfrac{v_0^2}{g}\ ;$$

si osservi l'importanza dell'uso dell'espressione analitica e la sua semplificazione finale.
Se richiesto, forniamo il risultato numerico:

$$z_{max} = 9.8\ \mathrm{m} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\left(9.8\ \mathrm{m\ s^{-1}}\right)^2}{9.8\ \mathrm{m\ s^{-2}}} = 9.8\ \mathrm{m} + \tfrac{1}{2}\,\frac{9.8^{\cancel{2}1}\ \mathrm{m}^{\cancel{2}1}\ \cancel{\mathrm{s}^{-2}}}{\cancel{9.8}\ \cancel{\mathrm{m}}\ \cancel{\mathrm{s}^{-2}}} = 9.8\ \mathrm{m} + 4.9\ \mathrm{m} = 14.7\ \mathrm{m}\ .$$

Quesito b) Indico con t_{z_0} l'istante in cui il corpo ripassa da z_0 in caduta:

$$z_0 = z(t_{z_0}) = z_0 + v_0 t_{z_0} - \frac{1}{2} g t_{z_0}^2\ .$$

Ottengo un'equazione di secondo grado in t_{z_0}, le cui due soluzioni le etichetto t'_{z_0} e $t"_{z_0}$:

$$t'_{z_0}\left(v_0 - \tfrac{1}{2} g t''_{z_0}\right) = 0\ ,$$

$$t'_{z_0} = 0\ \text{ e }\ t''_{z_0} = 2\tfrac{v_0}{g}\ .$$

La prima soluzione è il tempo iniziale, in cui il corpo si trovava in z_0, che indico $t'_{\uparrow z_0} = 0$.
La seconda invece corrisponde all'istante, in cui il corpo ripassa da z_0 in fase di caduta, che indico $t''_{\downarrow z_0} = 2\frac{v_0}{g}$.

La velocità in $t''_{\downarrow z_0}$:

$$v(t''_{\downarrow z_0}) = v_0 - g\left(2\frac{vo}{g}\right) = -v_0 \ ,$$

posso ricontrollare che in $t'_{\uparrow z_0} = 0$ si abbia $v(t'_{\uparrow z_0}) = v_0$, come atteso.

Quesito c) L'istante di tempo, in cui il corpo raggiunge il suolo, (t_s) per come abbiamo impostato l'asse z, si ha, quando $z(t_s)$ risulta pari a zero:

$$0 = z(t_s) = z_0 + v_0 t_s - \tfrac{1}{2} g t_s^2 \equiv g t_s^2 - 2 v_0 t_s - 2 z_0 = 0 \ ,$$

che ammette due soluzioni :

$$t_{s_1} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + (g)(2z_0)}}{g} \text{ e } t_{s_2} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + (g)(2z_0)}}{g}$$

dove $t_{s_1} < 0$ non è di interesse fisico, perché l'equazione $z(t)$ è stata ricavata per $t_0 \geq 0.$ [7]

Pertanto trascurando la soluzione t_{s_1}, possiamo tranquillamente usare l'etichetta t_s per t_{s_2}, ed usiamo $\equiv$ solo per l'inizio della prossima relazione, per chiarire, che siamo noi a rinominarlo in questo modo, dato che dal punto di vista fisico non c'è rischio di confusione:

$$t_s \equiv t_{s_2} = \frac{9.8 \text{ m s}^{-1} + \sqrt{\left(9.8 \text{ m s}^{-1}\right)^2 + (9.8 \text{ m s}^{-2})(2 \times 9.8 \text{ m})}}{9.8 \text{ m s}^{-2}} =$$
$$= \frac{\left[9.8 + \sqrt{\left(9.8^2\right) + 2(9.8^2)}\right] \ \cancel{\text{m}}\ \cancel{\text{s}^{-1}}}{9.8\ \cancel{\text{m}}\ \text{s}^{\cancel{-2}-1}} = \frac{\cancel{9.8}\left[1 + \sqrt{1+2}\right]}{\cancel{9.8}} \text{ s} = (1 + \sqrt{3}) \text{ s} \ .$$

Se utilizzo il valore $t_s = (1 + \sqrt{3})$ s, ottengo $z(t_s) = 0$, come atteso.
Se utilizzo il valore approssimato t_s = 2.7 s, otterrei:

$$z(2.7 \text{ s}) = [9.8 + 9.8 \times 2.7 - (1/2) \times 9.8 \times 2.7^2] \text{ m} =$$
$$= (9.8 + 27 - 36) \text{ m} = 0.8 \text{ m} \ .$$

ho trascurato la presentazione delle conversioni delle unità di misura dato che le avevo già svolte precedente equazione.

Osserviamo che l'incertezza sulle unità, dovuta agli arrotondamenti di 27 e 36, ce la ritroviamo ancora, pertanto il risultato atteso a meno della precisione su l'incertezza, sebbene sulla cifra più significativa, è consistente con zero.

Questo esempio chiarisce l'importanza dei risultati con i simboli delle grandezze fisiche, rispetto alle soluzioni numeriche da portarsi dietro nei problemi. I risultati numerici finali, possono essere affetti da incertezze, dovute alle approssimazioni.

La velocità, con cui il corpo raggiunge il suolo, da $\mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t = v(t) = v_0 - gt$, calcolata in t_s.

Se usate $t_s = (1 + \sqrt{3})$ s, ottenete:

[7] Ricordate che l'equazione vettoriale di $\boldsymbol{r}(t)$, che stiamo usando, è frutto dell'integrazione dell'accelerazione costante $\boldsymbol{a}$ in dt dall'istante t_0=0 s.

$$v(t_s) = v_0 - gt_s\text{= 9.8 m s}^{-1}\text{ - 9.8 m s}^{-2}\ (1+\sqrt{3})\text{ s = 9.8 m s}^{-1}\text{ - 27 m s}^{-1}\text{=}$$
$$\text{= -17.2 m s}^{-1},$$

Se usate il valore arrotondato t_s= 2.7 s, ottente:

$$v(t_s) = v_0 - gt_s\text{= 9.8 m s}^{-1}\text{ - 9.8 m s}^{-2}\text{ 2.7 s= (9.8 - 26.46) m s}^{-1},$$

potreste arrotondare per eccesso[8] a - 27 o per difetto a - 26. Otterreste rispettivamente -17.2 m s^{-1} o -16.2 m s^{-1}.

Di nuovo osservate come la soluzione analitica sia quella, alla quale riferirsi e sulla quale non ci possono essere incertezze. Il risultato numerico finale, se vi viene richiesto, può essere affetto da incertezze dovute alle approssimazioni. In caso di somme o sottrazioni le incertezze potrebbero interessare anche le cifre più significative, non solo quella meno significativa.

3.3 Sostituite nel problema: ... dove si trova il corpo prima di lanciarlo in alto ... (invece della svista ... dove si trova il corpo prima di lasciarlo cadere ...).

Per il caso del lancio del corpo con una velocità iniziale, descritto rispetto ad un asse coordinato verso il basso, la cui origine si trova nella posizione iniziale del corpo materiale: $\boldsymbol{r}_0 = 0\ \boldsymbol{u}_z$, $\boldsymbol{v}_0 = -v_0\ \boldsymbol{u}_z$ e $\boldsymbol{g} = g\ \boldsymbol{u}_z$.

L'equazione della coordinata $z(t)$ risulta pertanto:

$$z(t) = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \ .$$

Si considerino le due equazioni la suddetta per l'asse z orientato verso il basso, rispetto alla soluzione del Probl. 3.2, $z(t) = z_0 + v_0 t - (1/2)gt^2$, per l'asse z orientato verso l'alto e l'origine sul piano di calpestio.
Si osservi la differenza dal punto di vista dell'analisi di funzioni:
nella prima si ha, che per la soluzione, in cui si annulla la $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ = 0 (in $t = v_0/g$) la $\mathrm{d}^2 z/\ \mathrm{d}\,t^2$ >0, quindi un punto di minimo relativo.
Nella seconda si ha, che per la soluzione, in cui si annulla $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ (ovviamente sempre $t = v_0/g$) la $\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}t^2$ <0, quindi un punto di massimo relativo.

Oltre a ripassare i criteri per i massimi ed i minimi relativi, vogliamo ancora ricordare, come la scelta di una rappresentazione potrebbe fare perdere la connessione con la situazione reale, al punto che la rappresentazione con l'asse orientato verso il basso fornisce termini, che confondono: il punto, in cui il corpo è al suo massimo di altezza rispetto al piano di calpestio, risulta un minimo della funzione $z(t)$ nel caso del sistema di riferimento con asse z orientato verso il basso.

3.4 Dato che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2$, applicando l'operatore differenziale, si ha[9]:

[8] Nel Cap.2 abbiamo motivato la scelta dei fisici ad arrotondare per eccesso, ma non vogliamo essere vincolanti. Può andare bene anche un arrotondamento per difetto: un numero viene comunque considerato con un'incertezza sulla cifra meno significativa.

[9] Se non avete ancora dimestichezza con i differenziali pensate al differenziale $\mathrm{d}f$ come $(\mathrm{d}f/\ \mathrm{d}t)$ la derivata rispetto al tempo poi moltiplicata per $\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}f$= $(\mathrm{d}f/\ \mathrm{d}t)\mathrm{d}t$.

$$d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = d(v^2). \tag{3.28}$$

Calcoliamo $d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})$ che risulta:

$$d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v},$$

e, dato che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa, si ha $d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}$. Si ha quindi che $d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2d\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$.

La (3.28) ci permette di fornire la seguente relazione:

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}d\left(v^2\right) \ ,$$

CVD (Come Volevasi Dimostrare).

3.5

Correggere nel Probl. 3.5, ... su un quarto di circonferenza (la svista ... su una semicirconferenza ...). Inoltre aggiungente che 30°, è fornito con due cifre significative: vedete la nota seguente.

Per calcolare il lavoro lungo l'arco di 1/4 di circonferenza, osservo che il prodotto scalare tra la forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$ e l'elementino infinitesimo di spostamento $d\boldsymbol{s}$ risulta pari a $F\cos\alpha\ ds$. Per ottenere il lavoro devo integrare dall'inizio dell'arco, il

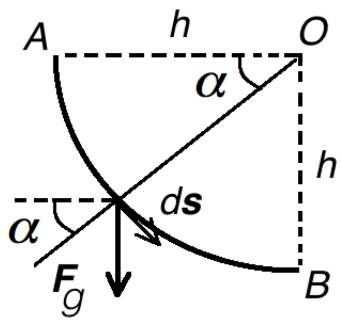

Figura 3.10 Il prodotto scalare $\boldsymbol{F}_g\cdot d\boldsymbol{s}$ risulta pari a $F_g\cos\alpha ds$. L'elementino di circonferenza ds risulta pari al raggio (h) per l'elementino di angolo $d\alpha$: $ds = h\ \ d\alpha$.

punto A, in cui pongo $\alpha = 0$, alla fine dell'arco, nel punto B, in cui $\alpha = \pi/2$, dove ho scelto il verso antiorario per l'incremento dell'angolo α:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_g) = \int_A^B \boldsymbol{F}_g\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} F_g\cos\alpha\ h\ d\alpha = F_g h\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}\cos\alpha\ d\alpha,$$

dove $F_g = mg$ e l'integrale di $\cos\alpha$ è senα.
Otteniamo quindi

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_g) = mgh\ (\mathrm{sen}\alpha|_0^{\pi/2}) = mgh[\mathrm{sen}(\pi/2) - \mathrm{sen}(0)] = mgh\ ,$$

CVD.

3.6 Una forza è conservativa, se su qualsiasi percorso chiuso il lavoro fatto dalla forza risulta nullo. Se per una forza trovo un percorso chiuso, sul quale il lavoro fatto risulta non nullo, allora tale forza non è conservativa.
Scelgo un percorso facile, sul quale fare il calcolo del lavoro, per esempio da A a B su un piano orizzontale, e poi ritorno da B ad A, sempre lungo la stessa direzione, ma in verso opposto.
La forza di attrito dinamico è data da $\boldsymbol{F}_d = -\mu_d N \boldsymbol{u}_v$, ovvero si oppone sempre al verso dello spostamento o equivalentemente al versore della velocità ($\boldsymbol{u}_v$).
Scegliamo un asse coordinato $\boldsymbol{u}_x$, orientato da sinistra verso destra e supponiamo di spostarci da x_A ad x_B con $x_B > x_A$.
Consideriamo lo spostamento d$\boldsymbol{s}$ che risulta quindi rappresentato sul nostro asse coordinato come d$x\,\boldsymbol{u}_x$.

La forza di attrito si oppone allo spostamento e quindi sarà orientata come $-\boldsymbol{u}_x$,

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_d) = \int_A^B (-\mu_d N \boldsymbol{u}_x) \cdot\ (\mathrm{d}x\,\boldsymbol{u}_x) = -\mu_d N \int_A^B \mathrm{d}x = -\mu_d N(x_B - x_A) < 0.$$

Adesso torno da B ad A, da destra verso sinistra, ma attenzione, scelto l'asse di riferimento, lo spostamento è comunque d$\boldsymbol{s}$ = d$x\,\boldsymbol{u}_x$, il verso è dato dagli estremi di integrazione, dato che x_A sarà minore di x_B.
La forza è opposta al versore della velocità, che da destra a sinistra è orientata in verso opposto a $\boldsymbol{u}_x$, quindi $\boldsymbol{F}_d$ adesso è orientata come $\boldsymbol{u}_x$: $\boldsymbol{F}_d = \mu_d N \boldsymbol{u}_x$.
Pertanto $W_{BA}(\boldsymbol{F}_d) = \int_B^A (\mu_d N \boldsymbol{u}_x) \cdot (\mathrm{d}x\,\boldsymbol{u}_x) = \mu_d N \int_B^A \mathrm{d}x = \mu_d N(x_A - x_B) < 0$.

Sul percorso chiuso da $A \to B$ e poi da $B \to A$: $W_{AA}(\boldsymbol{F}_d) = -2\mu_d N(x_B - x_A)$.

La forza di attrito non è conservativa, ed il suo lavoro risulta sempre minore di zero.

In presenza di forze di attrito l'energia meccanica diminuisce e l'energia viene dispersa.

Indichiamo con A il punto, in cui inizia il piano inclinato, con B la fine del piano, e con C il punto, che dobbiamo trovare, in cui si fermerà il corpo, per effetto della dissipazione di energia meccanica in presenza della forza di attrito.

Indichiamo l'inizio del piano inclinato con A, in cui $E_M(A) = mgh$, dove h è data da $l$senα.
Alla fine del piano inclinato la velocità la otteniamo dal principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_M(A) = E_M(B),$$

esplicitando energia potenziale e energia cinetica :

$$U(A) + K(A) = U(B) + K(B) \ ,$$

posta 0 l′energia potenziale in O (origine dell'asse z), in $z_B = 0$ si ha $U(B) = 0$:

$$mgz_A = \tfrac{1}{2}mv_B^2.$$

z_A è l'altezza del piano inclinato, e quindi

$$v_B = \sqrt{2gl\text{sen}\alpha}$$

forniamo anche il valore :

$$v_B = \sqrt{2 \times 9.807 \text{ m s}^{-2} \times 1.25 \text{ m} \times \text{sen}(30°)} = \sqrt{2 \times 9.807 \times 1.25 \times 0.50 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} \ ,$$

in cui facciamo notare come l'angolo α è stato fornito come 30°, e poi indicato che sono due cifre qui nelle soluzioni, cercheremo di indicare per gli angoli il numero di cifre significative, se non risulterà chiaro [10], quindi il sen(α) = 0.50, con sole due cifre, e saranno queste che domineranno la significatività del risultato: v_B = 3.5 m s^{-1}.

Per trovare la distanza, cui si ferma il corpo, consideriamo il teorema dell'energia cinetica e lo applichiamo da $B \to C$:

$$W_{BC}(\boldsymbol{F}_d) = \Delta E_M = E_M(C) - E_M(B) \ .$$

Vogliamo determinare la distanza dal piano inclinato dove si ferma il corpo, quindi l'energia cinetica in C deve essere nulla, e visto che siamo sullo stesso piano orizzontale l'energia potenziale non varia, ma anzi posta a zero la costante sul piano xy passante per l'origine, su cui giace il piano inclinato:

$$-\mu_d N d_{BC} = -\tfrac{1}{2}mv_B^2 \equiv$$

$$\equiv \mu_d N d_{BC} = \tfrac{1}{2}mv_B^2 \overset{mgh=l/2\ mv_B^2}{=} mgh = mgl\text{sen}\alpha$$

$$\mu_d \cancel{mg} d_{BC} = \cancel{mg}l\text{sen}\alpha \equiv d_{BC} = \tfrac{l\text{sen}\alpha}{\mu_d} \ .$$

$d_{BC} = (1.25 \text{ m} \times 0.50)/0.20 = 3.125$ m, che arrotondato a due cifre 3.1 m può essere fornito come risultato finale.

L'energia potenziale nel punto A, si trasforma in energia cinetica nel punto B e nel percorso da B a C viene tutta dissipata per effetto dell'attrito.

---

[10] Con gli angoli è solo una questione estetica di scrittura, dato che tra ° e numero non si usa lo spazio, non è bello da vedere 3.0 10$^{1°}$. Il problema non si pone per esempio per 30.0°