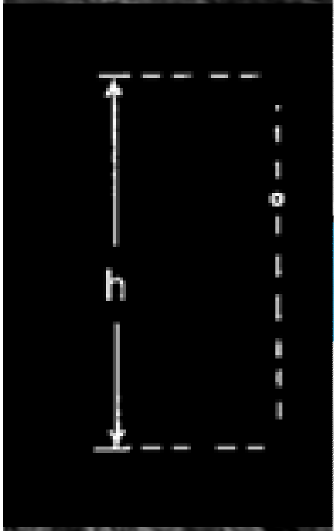
Propagazione delle incertezze

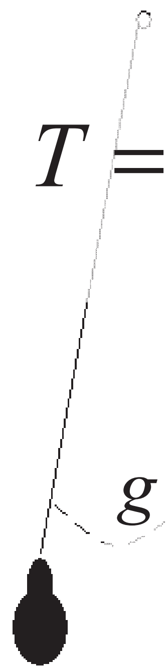


$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

Posso misurare g, indirettamente

$$g=\frac{2h}{t^2}$$

Devo propagare le incertezza su h e t.



$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g=4\pi^2\frac{l}{T^2}$$

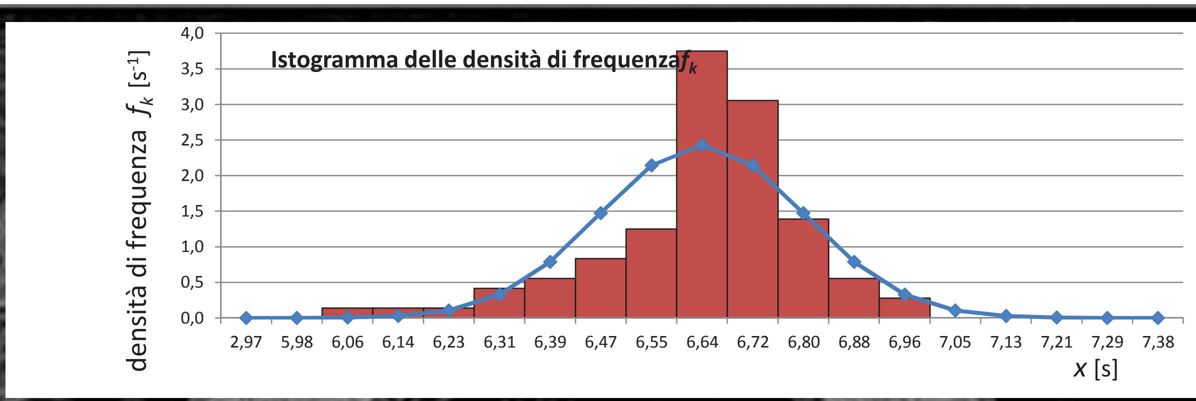
$$T=t/N$$

N # di oscillazioni

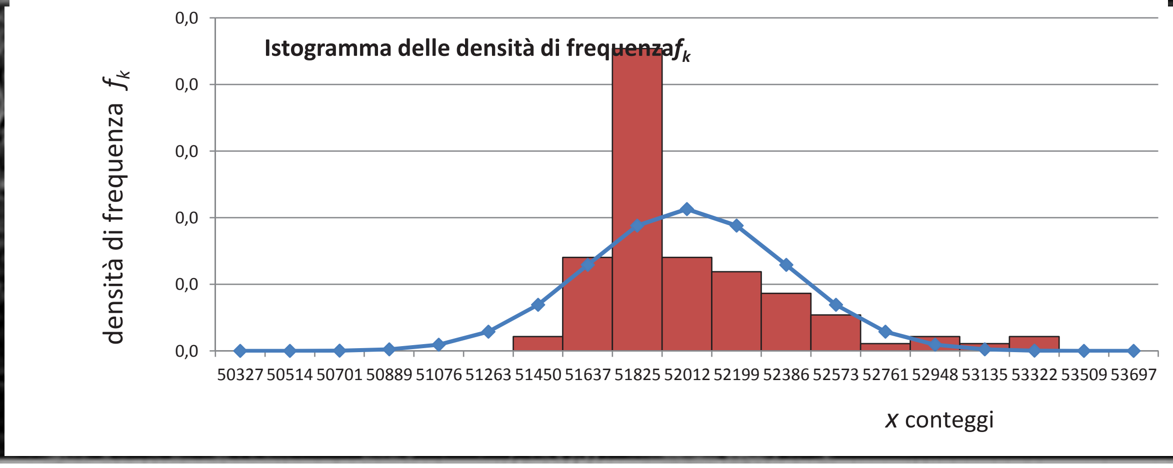
Abbiamo osservato due variabili

t tempo di 3 oscillazioni su un sistema «casalingo» e da «classe»

n numero di conteggi durante la caduta di un grave in laboratorio con elettronica costruita ad hoc.



Qual è «gaussiana» e …



Misure ripetute: 3 oscillazioni $t=3\ T$

$$T = t / N$$

	$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7
	Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P
i_{misura}	1	6.71	6.57	6.57	6.49	6.71	6.64	6.05
	2	6,.73	6.65	6.95	6.57	6.68	6.78	6.64
	3	6.67	6.75	6.42	6.73	6.74	6.73	6.11
	4	6.73	6.61	6.63	6.67	6.70	6.63	6.36
	5	6.70	6.57	6.73	6.66	6.79	6.65	6.87
	6	6.63	6.65	6.63	6.67	6.99	6.66	6.34
	7	6.76	6.69	6.83	6.67	6.90	6.63	6.25
	8	6.78	6.71	6.53	6.72	6.71	6.72	6.32
	9	6.57	6.49	6.66	6.65	6.65	6.62	6.65
	10	6.76	6.60	6.67	6.69	6.89	6.63	6.89

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

t_{medio}= 6.65 s

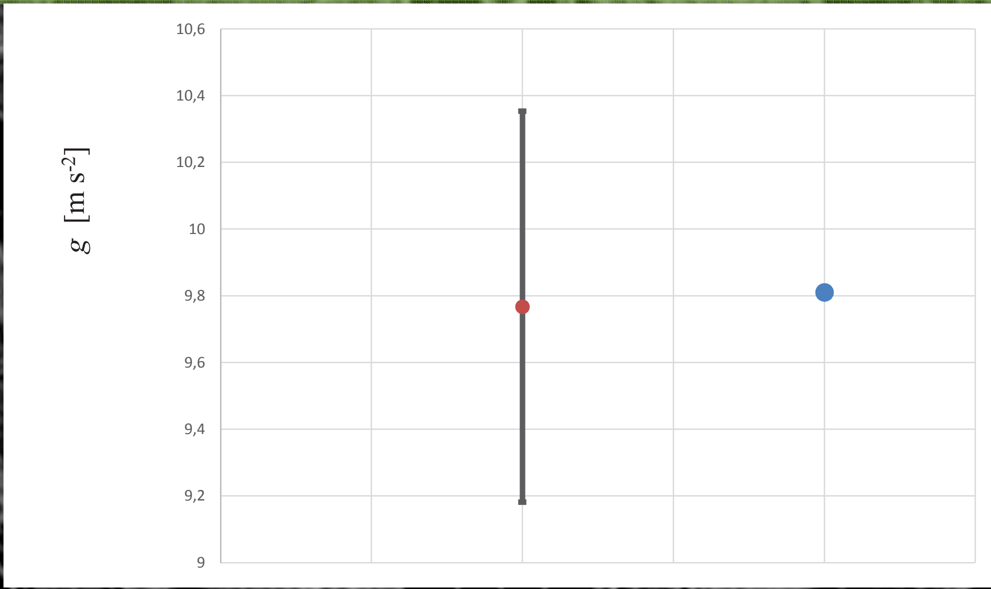
σ_t= 0.17 s

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Incertezza casuale $\sigma_t / t = \sigma_T / T = 0.03$

Incertezza totale $(\delta t)^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 =(0.17\ s)^2$

Con il pendolo otteniamo



La misura di $g = 9.7 \pm 0.6$ m s^{-2}

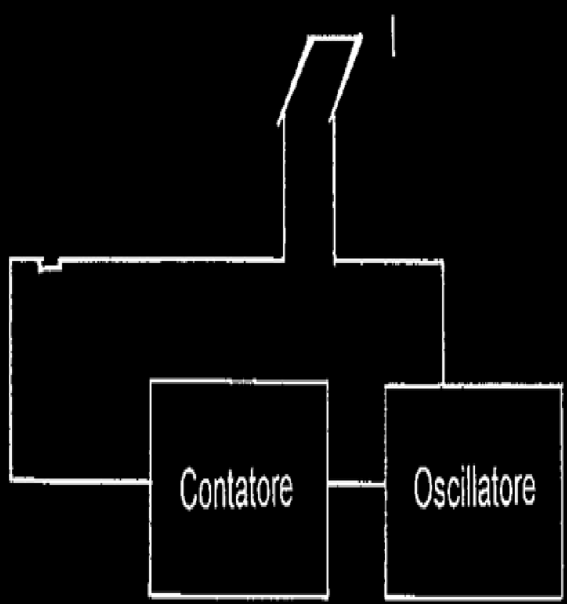
Apparato per la misura precisa di *g*:

maggiore precisione = maggiore complicazione

- Misure del tempo:
  - Misura diretta del numero di impulsi durante la caduta: n.
  - Conversione da n a t sulla base della misura del numero di impulsi per unità di tempo.
- n_{un} = impulsi/s

$$t = \frac{n}{n_{un}} \overset{\text{dim}}{\equiv} \frac{\text{impulsi}}{\text{impulsi/s}} = \text{s}$$

Misura del numero di impulsi al s: n_{un}



- Cronometriamo per un tempo fissato (2') t_f il numero di impulsi che acquisisce il contatore n_f.

$$n_{un} = \frac{n_f}{t_f} \quad \left(\frac{\text{impulsi in } 2'}{120 \text{ s}} \right)$$

Abbiamo rilevato una misura per ogni docente.

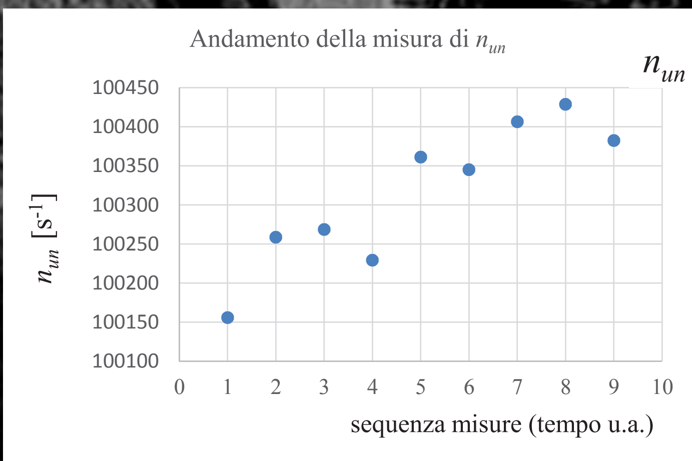
- Avremo 10 misure di n_{un}.

- n_{un}.= valore centrale $\pm$ semidispersione.

intervallo del 100 % dei dati osservati

Modello e realtà: generatore di impulsi

$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P	G	G.C.	A_T 2
f [kHz]	100.13	100.18	100.23	100.26	100.31	100.33	100.35	100.36	100.36	100.38
t_f	120.02	120.26	118.93	119.99	80.5	120.05	120.28	119.89	119.34	119.79
n_f	1.2E+07	12044734	11923745	12031230	8068454	12048353	12069516	12037708	11985148	12024801
n_{un}	100111	100155.78	100258.5	100268.6057	100229.2422	100361.1245	100345.1613	100406.2724	100428.5906	100382.3441
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



n_{un} = *valore centrale $\pm$ semidispersione*

n_{un}=100270 $\pm$ 160 s^{-1}

Sommato in quadratura anche 0.5 (ε) conteggi ½ risoluzione.

Incertezza su t

- Si propaga l'incertezza totale relativa:

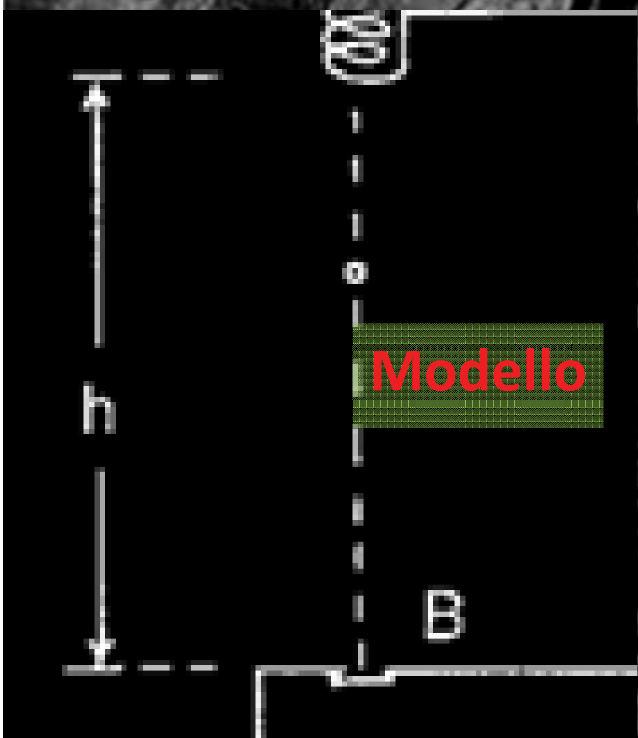
$$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta n_{un}}{n_{un}} \equiv \qquad \frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{\bar{n}} + \frac{\delta n_{un}}{\hat{n}_{un}}$$

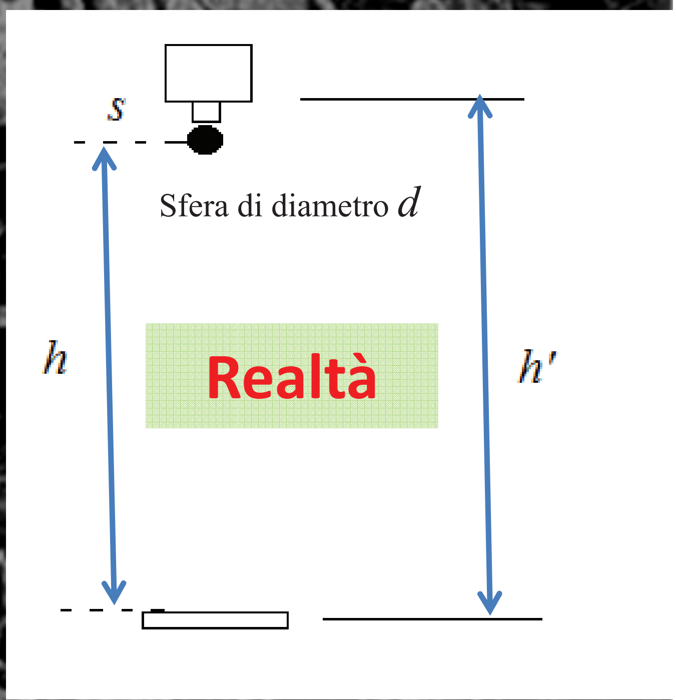
  - δn (gaussiana ?) per ora σ_n ed ε_n
  - δn_{un} semidispersione $\underline{=}$ Δn_{un} /2 e ε_{nun}).

$$\frac{\delta t}{t} = 0.007 + 0.002 \qquad \frac{\delta t}{t} = 0.007 + 0.0009$$

Distribuzione uniforme

Per misurare g oltre a t serve h





Incertezza su *h*

- Ovviamente va osservato sull’apparato
  - Si osserva che l’interruttore si attiva, quando metà sferetta entra nell’interruttore.

$$h = h' - s - \frac{d}{2} \qquad \delta h = \varepsilon_{h'} + \varepsilon_s + \frac{1}{2}\varepsilon_d$$

h= 1250.2 + 0.5 mm dh/h=0.04 %

  - Solo incertezze di lettura: *h* misurata con regolo (ris 1 mm), *s* e *d* misurati con calibro (ris 1/20 mm).

Misura di *g*

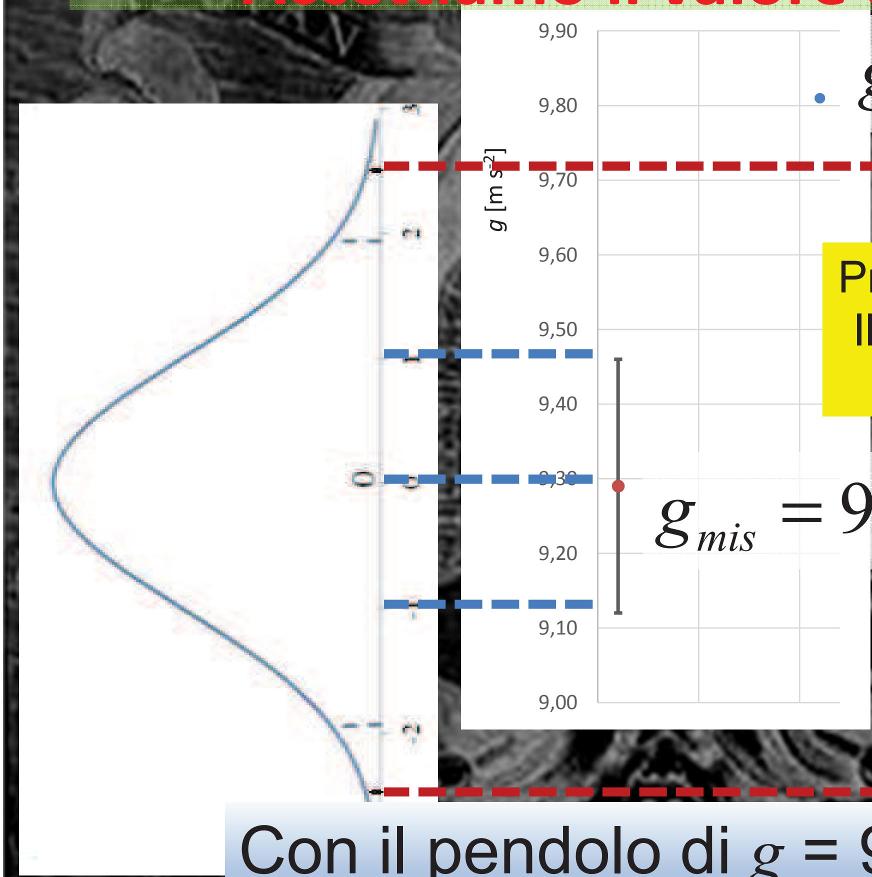
$$g = \frac{2h}{t^2} \qquad \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t}{t}$$

$$\frac{\delta g}{g} = 0.0004 + 2 \times 0.009 \approx 0.018$$

$$g = 9.2935 \pm 0.1652 \ \ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g = 9.29 \pm 0.17\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Accettiamo il valore atteso?



$$g_{att} = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Probabilità di ottenere
Il valore fuori minore
del 1 %

$$g_{mis} = 9.29 \pm 0.17\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Con il pendolo di g = 9.7 $\pm$ 0.6 m s^{-2}

Qualcosa non torna: accuratezza

I problemi del laboratorio sono tanti:

- bisogna conoscere bene il modello,
  - **e verificare che sia adatto al fenomeno osservato.**

Cosa ancora più problematica:

bisogna tenere sotto controllo ogni strumento e

- **verificarne il funzionamento.**
- **Richiede tempo pazienza e … dimestichezza.**

Infatti abbiamo cercato di fare una misura più precisa, utilizzando elettronica.
La misura ha un grado di precisione maggiore,
ma risulta meno accurata di un semplice pendolo

Qualcosa non torna: non centriamo l'obiettivo: accuratezza

- Pensiamo sia l'attrito dell'aria?

- Se stimiamo l'attrito e come limite superiore che la pallina viaggi sempre alla velocità massima si ottiene dalla $F_v = 6\pi\eta rv$

da una quota $h = 1.34$ m una decelerazione al massimo di 0.001 m s^{-2}.

Per essere piu precisi: bisogna …

- Pensiamo sia un ritardo nel rilascio della sferetta dall'elettromagnete?
  - Applichiamo un altro modello,
  -

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2$$

  - Ovvero pensiamo che l'elettronica possa introdurre un ritardo e/o il contatore possa contare in anticipo rispetto alla caduta del grave.
  - Sarà la calibrazione a dirci come stanno le cose.
  - **Dobbiamo trovare il modo di estrarre t_0 senza coinvolgere altre grandezze: calibrazione.**

Per fare questo: regressione lineare

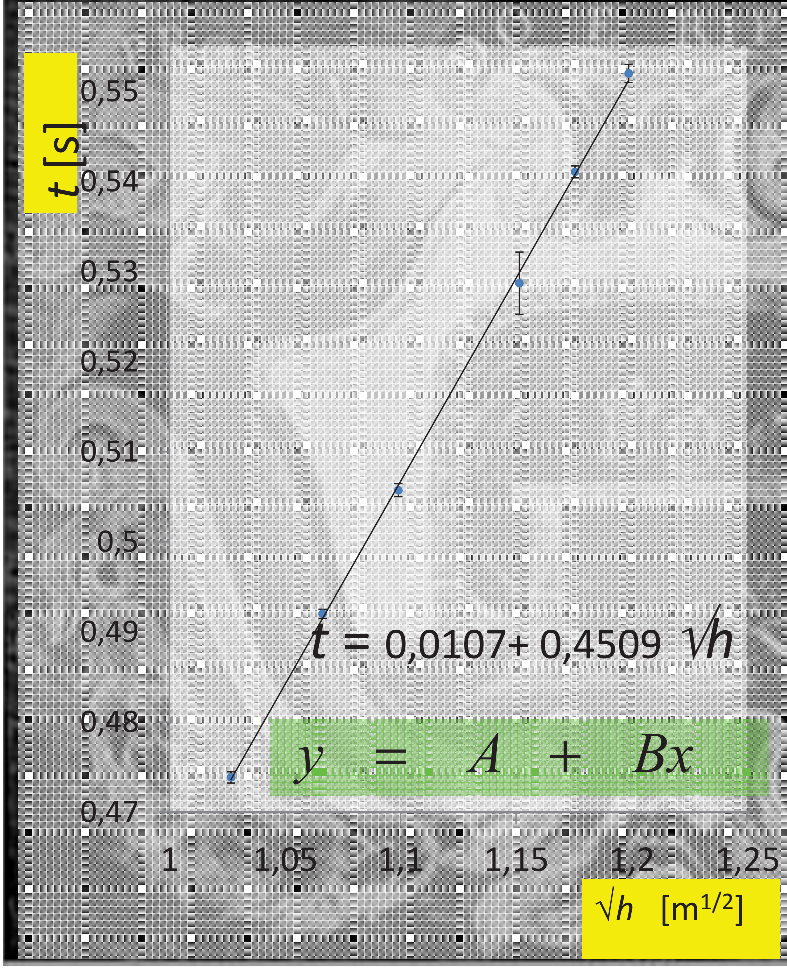
La regressione lineare può servire per estrarre misure, sulla base di una relazione tra grandezze misurate direttamente e/o per calibrare gli strumenti sulla base di un modello.

Esplicito *t* in fuzione di *h*

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 \Rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{\frac{1}{2} g} (t + t_0)$$

$$\sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} = t + t_0$$

$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h} \equiv y = A + B \cdot x$$



$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}$$

t_0 = - 0,0107 s

t_0 = - 10.7 ms

Il contatore parte in anticipo: l'elettromagnete sgancia la sferetta in ritardo, rispetto all'interruttore elettrico, che commuta "simultaneamente" l'impulsatore sul contatore.

Adesso la misura "corretta" di g

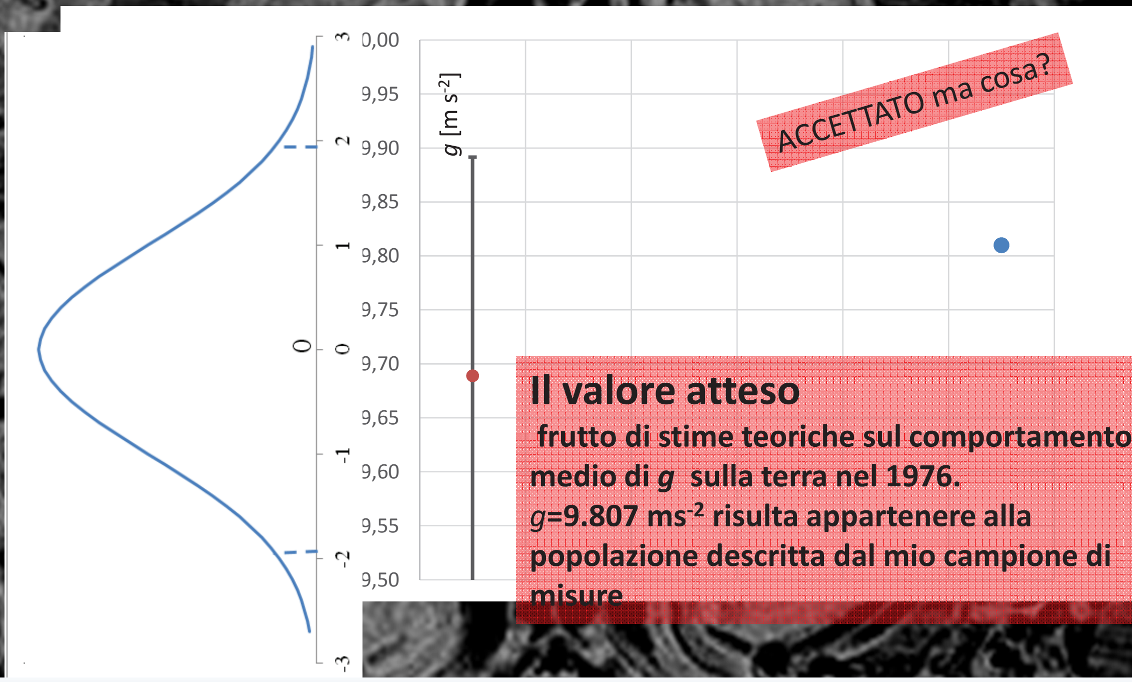
- Dalla relazione

$$g = \frac{2h}{(t+t_0)^2} \qquad \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t + \delta t_0}{t + t_0}$$

– Ovviamente ho un'incertezza anche su t_0

$$t_0 = -10.7 \pm 0.7 \ \text{ms}$$

$$g_{mis}(accurata) = 9.69 \pm 0.20 \text{ m s}^{-2}$$



Il valore atteso

frutto di stime teoriche sul comportamento medio di g sulla terra nel 1976.
g=9.807 ms^{-2} risulta appartenere alla popolazione descritta dal mio campione di misure

Ma dovrei anche verificare o fornire una stima, che il modello-legge, sia appropriata per i dati osservati.

Seconda parte

- Abbiamo bisogno di apparati complessi, per formare ragazzi e giovani all'approccio scientifico e far apprezzare la capacità che abbiamo, che avrebbero, nel predire un comportamento di un fenomeno naturale?

Dalla mia esperienza, ritengo sia più immediato e controllabile l'applicazione del metodo a fenomeni a portata di mano,

Intendo fenomeni "palpabili" dagli studenti.

Ci sono esperienze che possiamo condurre con facilità in classe?

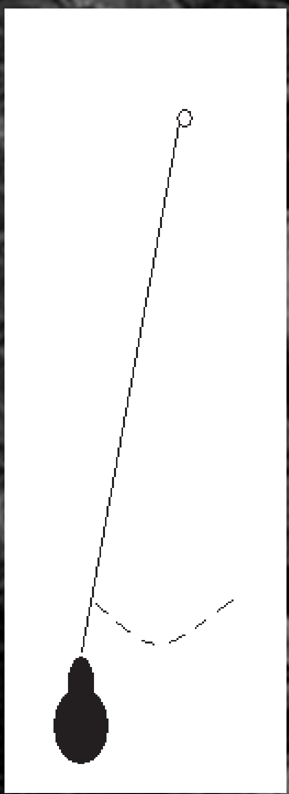
- Sempre il pendolo: un sistema che utilizzo per introdurre la teoria degli errori per osservare grandezze "casuali", come visto
  - Posso prevedere qual è il periodo di oscillazione del pendolo?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

- Abbiamo fatto un'osservazione solo per una lunghezza l.
- PREVISIONI: su un cordino ed un piombo pescato a 15 m di profondità ad Otranto, di fronte alla ex cava di Bauxite.

Per $l \sim 1.15$ cm si ha $T = 2.2$ s.

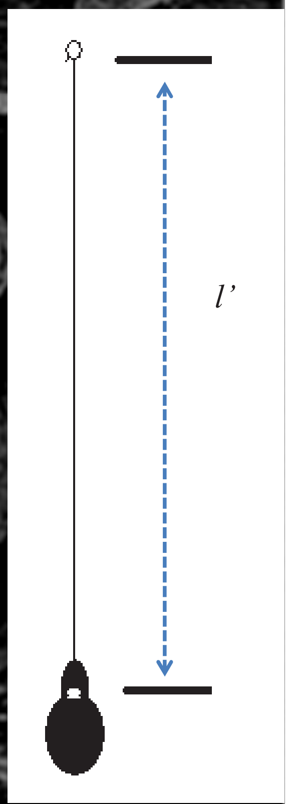
Uso il pendolo per la verifica di una legge fisica



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Al variare di l misuro T, ma qual è il baricentro?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'+l_?}{g}}$$

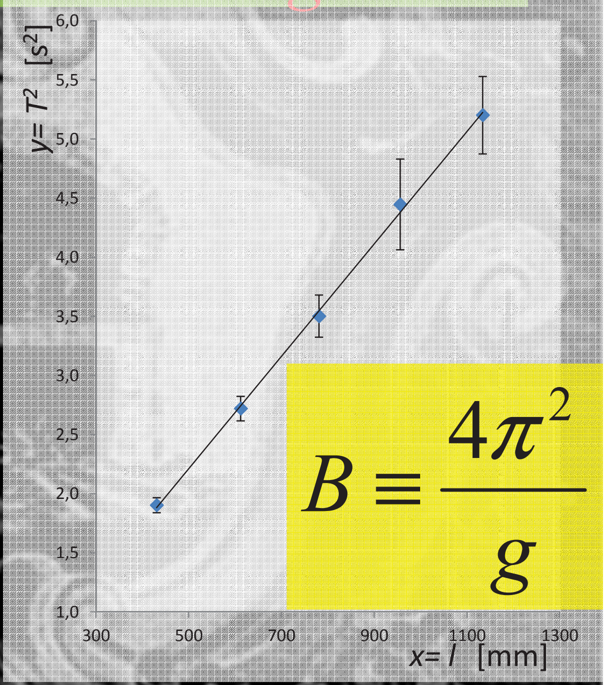


Verifichiamo se la legge va bene per i dati e misuriamo anche *g*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l'+l_?}{g}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l' + \frac{4\pi^2}{g}l_?$$

$$y = Bx + A$$



$$B \equiv \frac{4\pi^2}{g}$$

Possiamo affrontare la verifica di una legge

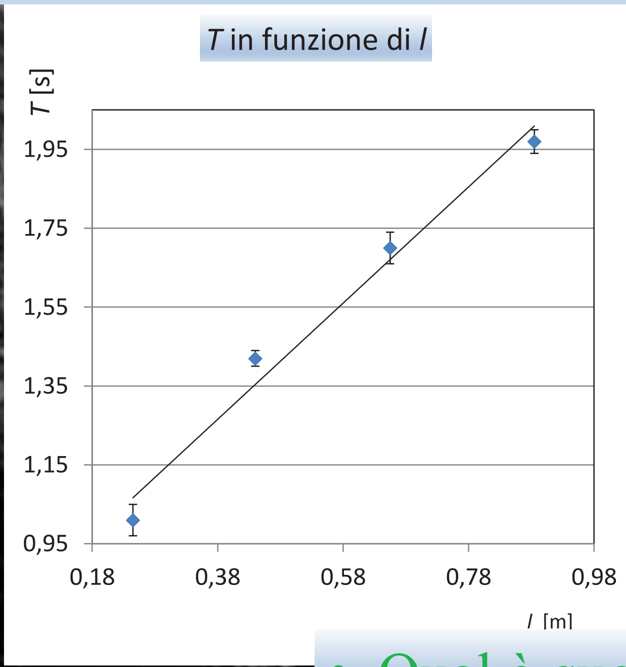
Per me è l'argomento più attraente e che si può proporre anche alle scuole superiori, come piccole licenze «didattiche».

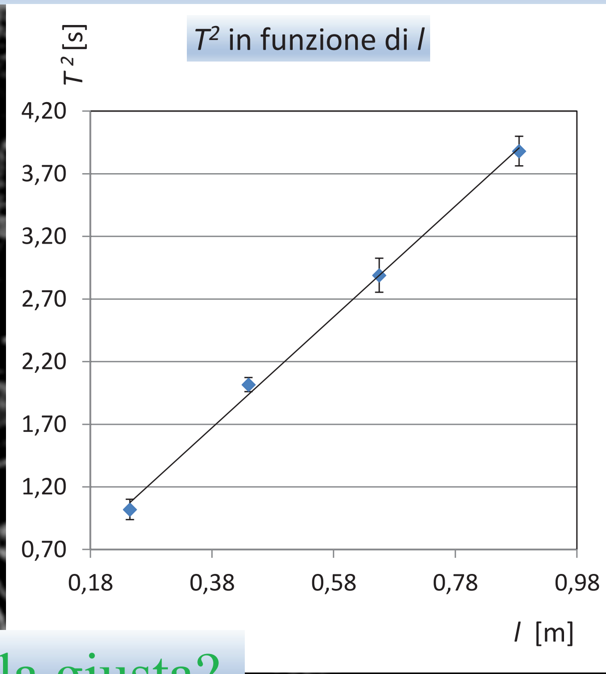
Partiamo dal caso generale

$y=A+Bx$

Rileviamo coppie di dati

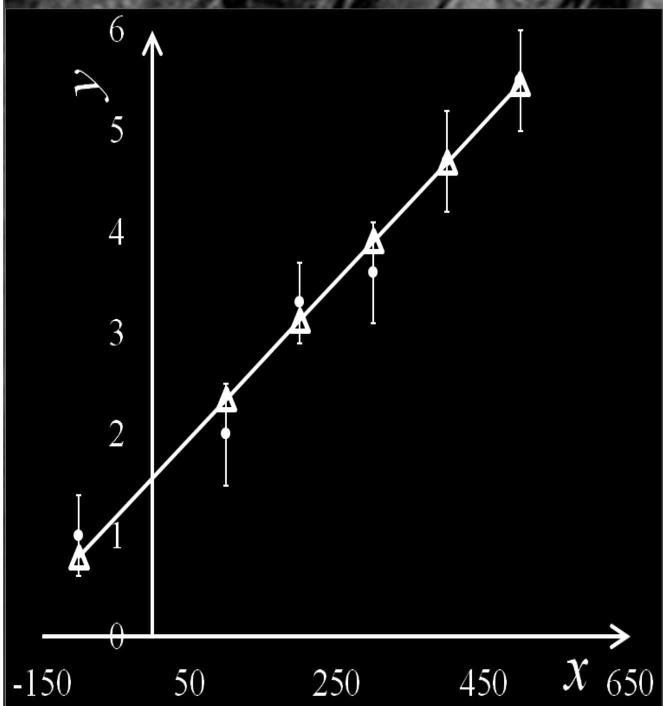
- Possiamo variare i volte ($x_i = l_i$) e misurare ($y_i = T_i$) una o ripetute volte per ogni l_i.





- Qual è quella giusta?

Quando accettiamo un modello?



Modello-legge,

- Linea continua

- Dati sperimentali
  - punti con simboli

Per motivi didattici riportiamo con triangoli i valori Y_i dedotti dalla legge per ogni x_i

Come accettavamo un dato?

Se il valore atteso rientrava nell'intervallo della nostra misura in confronto all'incertezza.

Per una legge?

Accettiamo che «in media» ogni valore atteso Y_i (dedotto dalla legge) rientri nell'intervallo $(y_i) \pm \delta y_i$.

Questo deve essere minimo

- Quindi $|Y_i - y_i| \leq \delta y_i$

$$\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2 \leq 1$$

$$\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2 \leq N$$

$$\min\left\{\sum\left(\frac{y_i - Y_i}{\delta y_i}\right)^2\right\}$$

Metodo dei minimi quadrati

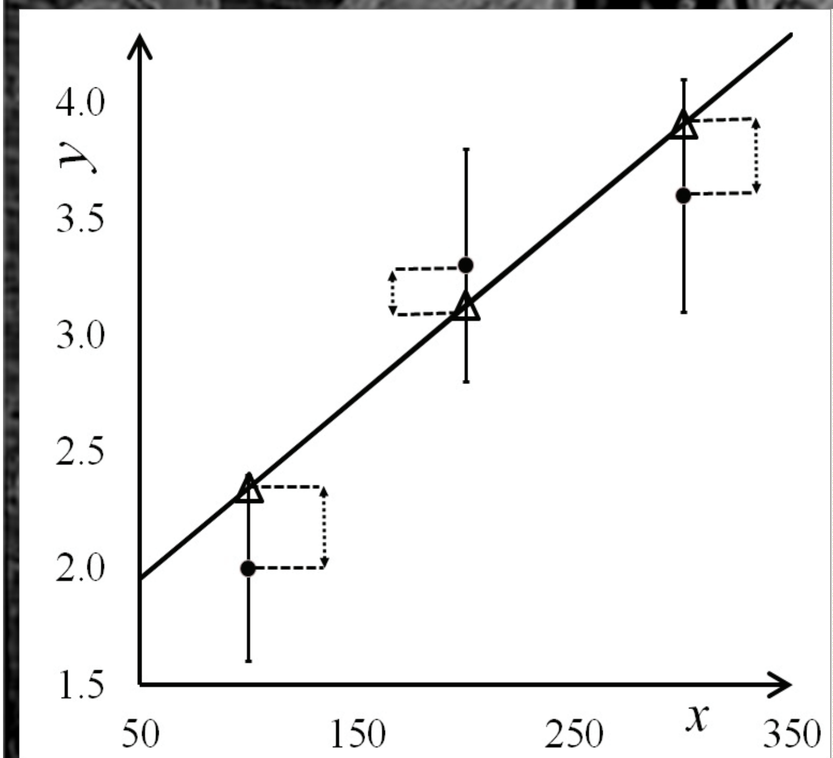
Stesso risultato se

- Considero ogni misura gaussiana e studio la probabilità che una legge teoria sia appropriata per ogni valore osservato

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_n) \propto e^{-\sum (y_i - Y_i)^2 / 2\sigma_i^2}$$

$$\min\left\{ \sum \left(\frac{y_i - Y_i}{\sigma_i^{\cancel{2}}} \right)^2 \right\}$$

Ricavo la retta



Fogli di calcolo

O

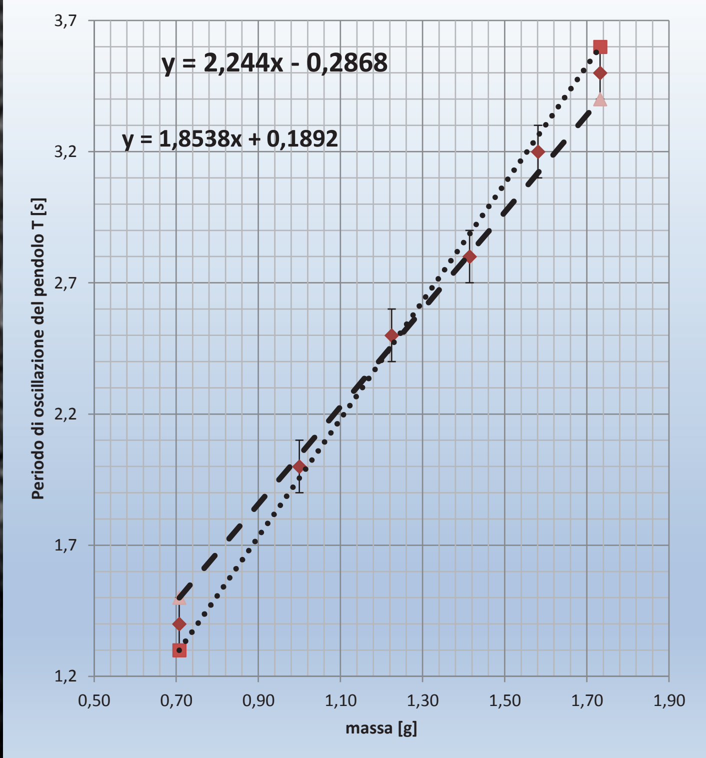
Stima

Valori centrali

E

semidispersione

Prendiamo



Pendenza massima punteggiata
$y_{max} = A' + B_{max}\, x$
da
$y_1 - \delta y_1$ e $y_4 + \delta y_4$
e
pendenza minima
$y_{min} = A'' + B_{min}\, x$

B_{ms} *valore centrale*

δB = *semidispersione*

Per avere meno errori misuro 3 oscillazion

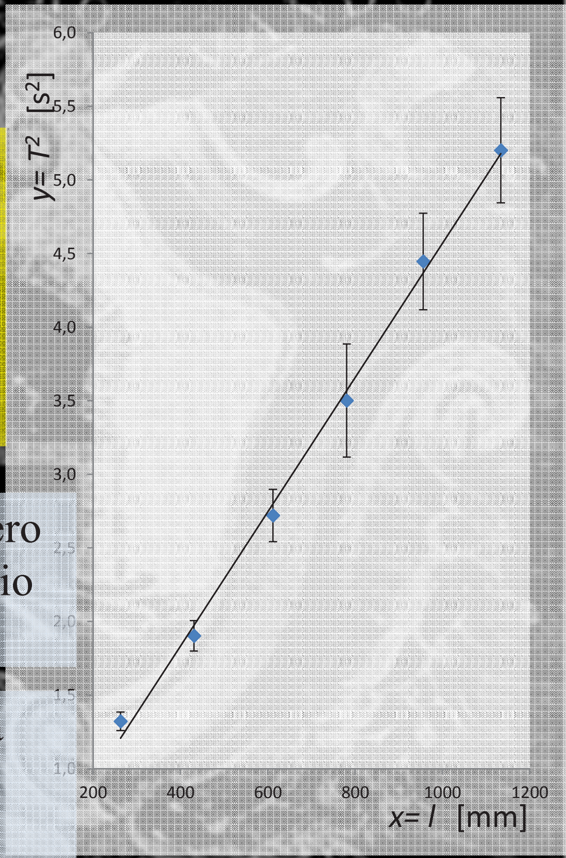
- $t = 3T$

N misure	*l* [mm]	263	431	612	781	956	1134
1	*t* [s]	3,35	4,19	4,73	5,47	6,32	7,06
2	*t* [s]	3,44	3,99	5,09	5,79	6,34	6,99
3	*t* [s]	3,45	4,29	5,12	5,78	6,68	6,53
4	*t* [s]	3,58	4,12	4,87	5,56	6,24	6,78
5	*t* [s]	3,43	4,10	4,93	5,47	6,05	6,85
	media	3,45	4,14	4,95	5,61	6,33	6,84
	dev st	0,08	0,11	0,16	0,16	0,23	0,21

- $T = 1/3\ t$, e quindi $y = T^2$ ed $x = l$:

$\overline{T^2}$ [s²]	1,323	1,903	2,720	3,502	4,446	5,201
σ_y [s²]	0,063	0,102	0,177	0,200	0,321	0,314

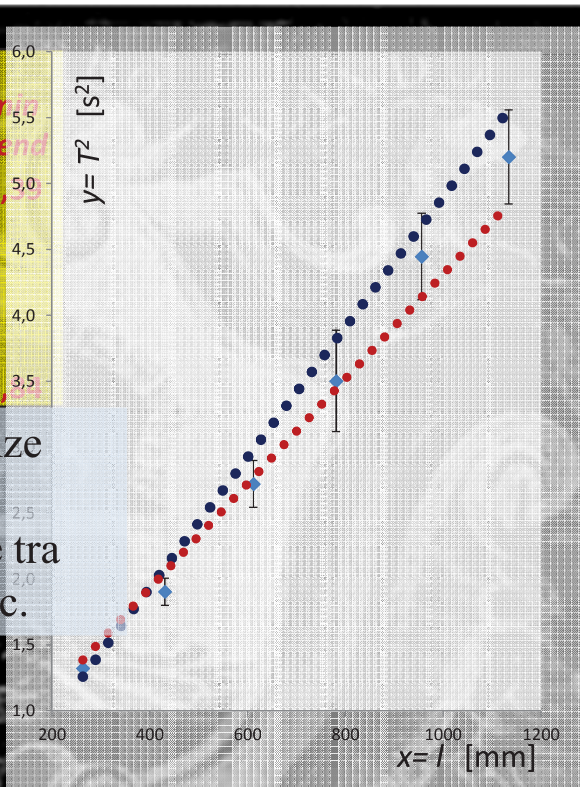
x	y			δy	$\delta y/y$
l [mm]	T^2 [s²]	ε_y [s²]	σ_y [s²]	δ_y [s²]	
263	1,323	0,004	0,063	0,064	5%
431	1,903	**0,102**	0,016	0,104	5%
612	2,720	**0,177**	0,013	0,177	7%
781	3,502	**0,200**	0,328	0,384	11%
956	4,446	**0,321**	0,065	0,328	7%
1134	5,201	**0,314**	0,170	0,357	7%



Con excel, o anche calcolatori, si potrebbero ricavare i coefficienti della retta che meglio approssima i dati, ma le incertezze?

C'è un modo per far apprezzare la verifica delle leggi fisiche anche a studenti delle scuole inferiori: certo basta il teorema di pitagora, applicato alla pendenza della retta.

x	y			δy	$\delta y/y$		
l [mm]	$\overline{T^2}$ [s²]	ε_y [s²]	σ_y [s²]	δ_y [s²]		***MAX pend***	***min pend***
263	1,323	0,004	0,063	0,064	5%	**1,26**	**1,39**
431	1,903	**0,102**	0,016	0,104	5%		
612	2,720	**0,177**	0,013	0,177	7%		
781	3,502	**0,200**	0,328	0,384	11%		
956	4,446	**0,321**	0,065	0,328	7%		
1134	5,201	**0,314**	0,170	0,357	7%	**5,56**	**4,84**

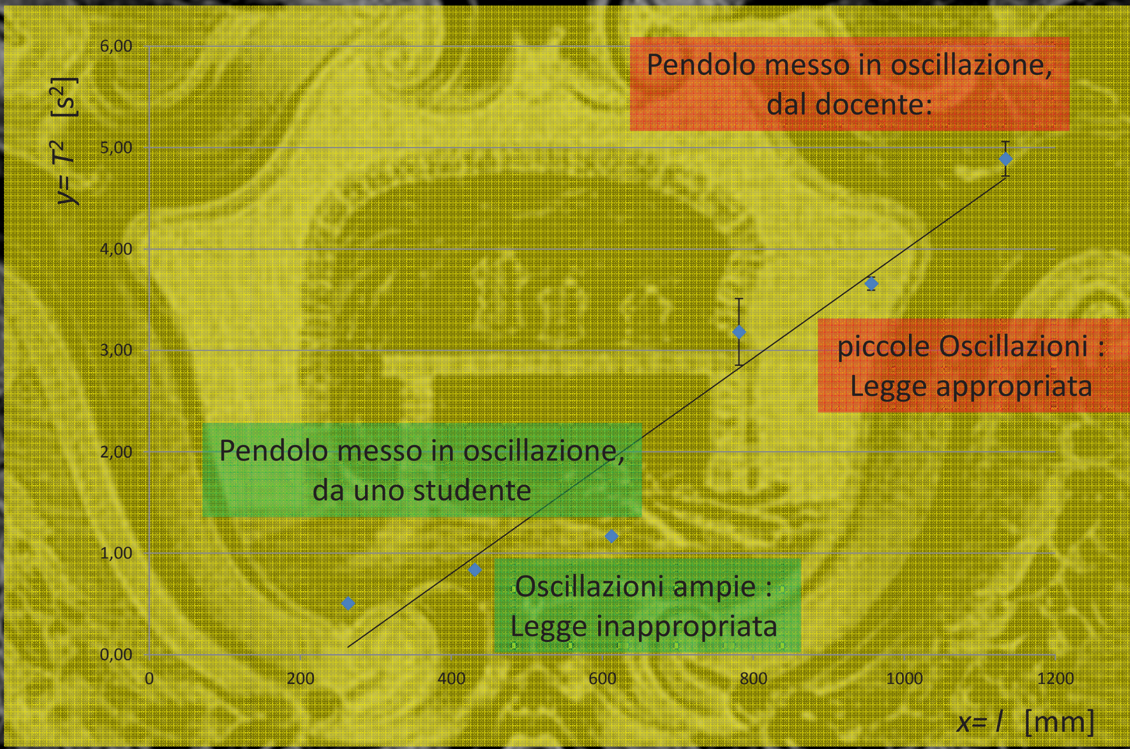


Per studenti che non abbiamo conoscenze matematiche si può fare graficamente.
Per studenti che conoscono la relazione tra tangente di un angolo e la pendenza, ecc.

	B_{max}	B_{min}		
	0,00494	**0,00397**		
B_{ms}	0,004455	s²/mm	4,46	s²/m
$\Delta_B/2$	0,000485	s²/mm	0,485	s²/m
$B=$	4,46	±	0,49	s²/m

B_{ms} come valore centrale
incertezza come semidispersione

Misura di g, in classe : 10/2012



$$\sqrt{\frac{\sum (y_i - Y_i)^2}{d}}$$

Distanza media statistica

$$\sqrt{\frac{\sum (y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}} \stackrel{def}{=}$$

Distanza media statistica per la retta

$$\stackrel{def}{=} \sigma_Y$$

Deviazione standard della retta teorica

Accetto la retta se $\sigma_Y \leq \delta y$ in media sui vari punti.

Misura di g

$$B = \frac{4\pi^2}{g}$$

g	8,85	m/s^2
δg	0,96	m/s^2
g atteso	9,806	m/s^2