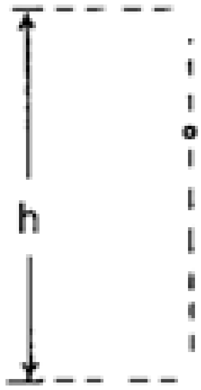
Propagazione delle incertezze

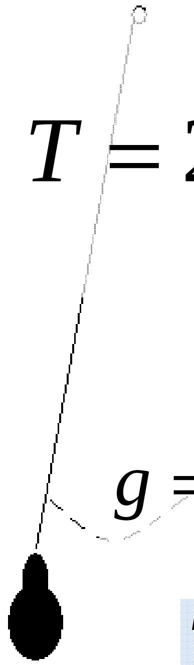


$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

Posso misurare g, indirettamente

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

Devo propagare le incertezza su h e t.



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

$$T = t / N$$

***N* # di oscillazioni**

Propagazione delle incertezze

$$v_s = 2(x_1 - x_2)\nu$$

Velocità del suono v_s misurata dalla distanza tra due massimi (x_1 ed x_2) di onde stazionarie e la frequenza (ν).

Caso generale: deduzione di una grandezza dipendende (v_s) da altre grandezze indipendenti (x_1, x_2, n).

La grandezze indipendenti possono a loro volta essere dedotte da relazioni, percui dipendenti a loro volta (λ lunghezza d'onda per esempio).

$$\lambda = 2(x_1 - x_2) \qquad v_s = \lambda \nu$$

Attenzione a non confondersi con misure dirette o indirette

È utile la descrizione funzionale g grandezza dipendente dalle grandezze $x, y, \ldots,$ e z:

$$g = g(x, y, \ldots, z)$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$g = x + y$ $\quad x = x_{ms} \pm \delta x$ $\quad y = y_{ms} \pm \delta y$

Vogliamo trovare la migliore stima di g e l'incertezza δg

$$g_{ms} = x_{ms} + y_{ms}$$

Qual è il valore massimo g?

$$g_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (x_{ms} + \delta x) + (y_{ms} + \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) + (\delta x + \delta y)$$

Qual è il valore minimo g?

$$g_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = (x_{ms} - \delta x) + (y_{ms} - \delta y) = (x_{ms} + y_{ms}) - (\delta x + \delta y)$$

Esprimiamo la misura di g: $\quad g = g_{ms} \pm \delta g$

$$\delta g = \delta x + \delta y$$

Propagazione: somme e sottrazioni

$$g = x + y + z = \varsigma + z$$

Possiamo iterare per n variabili (grandezze)

Possiamo verificare che anche nelle sottrazioni:

$g = x - y$ **Si ha** $\delta g = \delta x + \delta y$

In generale in caso di somme o sottrazioni:

$$g = x + o - y + o - \cdots z$$

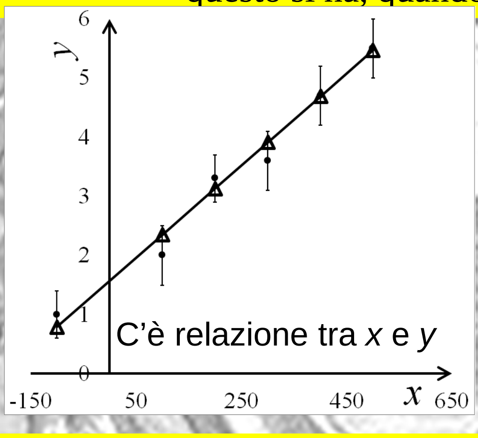
$$\delta g = \delta x + \delta y + \cdots \delta z$$

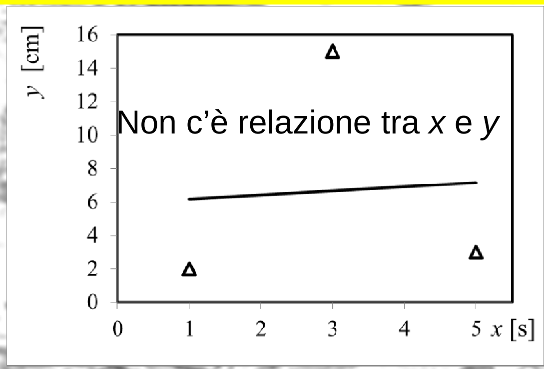
si sommano le incertezze totali (assolute)

Somme lineari ed in quadratura

$$g_{max} = x_{max} + y_{max} = (x+\delta x)+(y+\delta y) = (x+y)+(\delta x+\delta y)$$

In questa derivazione abbiamo assunto che, quando x è massima, lo è anche y, questo si ha, quando c'è relazione tra le due grandezze.

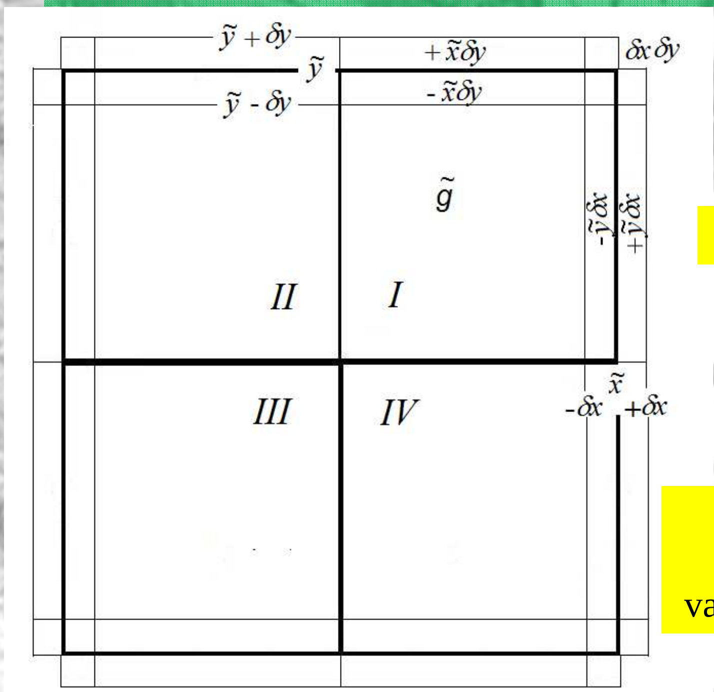




Se non c'è relazione si sommano in quadratura $(\delta g)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots (\delta z)^2$

$$\delta g = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots (\delta z)^2}$$

Propagazione prodotti e frazioni



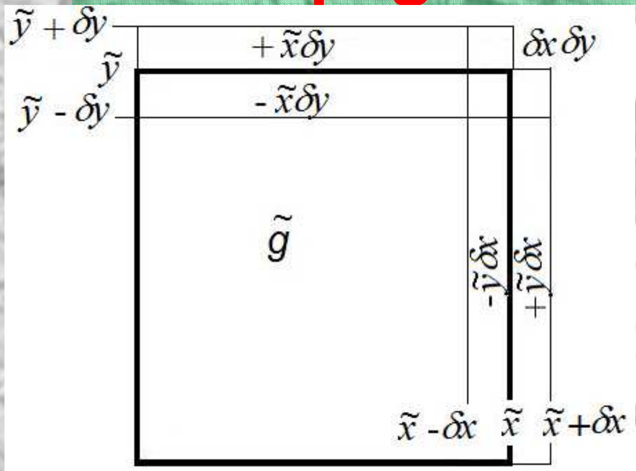
$$g = xy$$

Discuto il caso xy, con x ed y positive

Se prendo in valore assoluto $|x||y|$, la discussione
vale per tutti i casi come mostrato a lato.

Quindi quanto ricavato lo estendo a qualsiasi situazione, rispetto ai valori assoluti. Le incertezze le esprimiamo in valore assoluto.

Propagazione per prodotti



$$g = xy$$

$$g_{ms} = x_{ms} y_{ms}$$

$$g_{\max} = x_{\max} y_{\max}$$

$$g_{\max} = (x_{ms} + \delta x)(y_{ms} + \delta y) = x_{ms} y_{ms} + x_{ms}\delta y + y_{ms}\delta x + \delta x\,\delta y$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms}\delta y + y_{ms}\delta x$$

$$g_{\max} \approx x_{ms} y_{ms} + x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\delta g = g_{\max} - g_{ms} \approx x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\frac{\delta g}{x_{ms} y_{ms}} = \left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$g_{ms}$$

Propagazione per prodotti

$$g_{\min} = (x_{ms} - \delta x)(y_{ms} - \delta y) = x_{ms} y_{ms} - x_{ms}\delta y - y_{ms}\delta x + \delta x\,\delta y$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms}\delta y - y_{ms}\delta x$$

$$g_{\min} \approx x_{ms} y_{ms} - x_{ms} y_{ms}\left(\frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)$$

$$\frac{dg}{g_{ms}} = \frac{\delta y}{y_{ms}} + \frac{\delta x}{x_{ms}}$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta x}{|x_{ms}|}$$

Con i valori assoluti includo tutti i possibili casi.

Propagazione per prodotti … frazioni

$$g = xyz = \varsigma z$$

Possiamo iterare per *n* variabili (grandezze)

$$g = xy \cdots z$$

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

Frazioni

$$g_{\max} = \frac{x_{\max}}{y_{\min}} = \frac{x_{ms} + \delta x}{y_{ms} - \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}} \left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right) \approx 1 + \frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\max} = g_{ms} + g_{ms}\left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$g_{\min} = \frac{x_{\min}}{y_{\max}} = \frac{x_{ms} - \delta x}{y_{ms} + \delta y} \approx \frac{x_{ms}}{y_{ms}} \left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\delta x}{x_{ms}}\right)\left(1 - \frac{\delta y}{y_{ms}}\right) \approx 1 - \frac{\delta x}{x_{ms}} - \frac{\delta y}{y_{ms}}$$

$$g_{\min} = g_{ms} - g_{ms}\left(\frac{\delta x}{x_{ms}} + \frac{\delta y}{y_{ms}}\right)$$

Prodotti/frazioni somma lineare e quadr.

$g = g(x, y, \cdots z)$ frazioni e/o prodotti

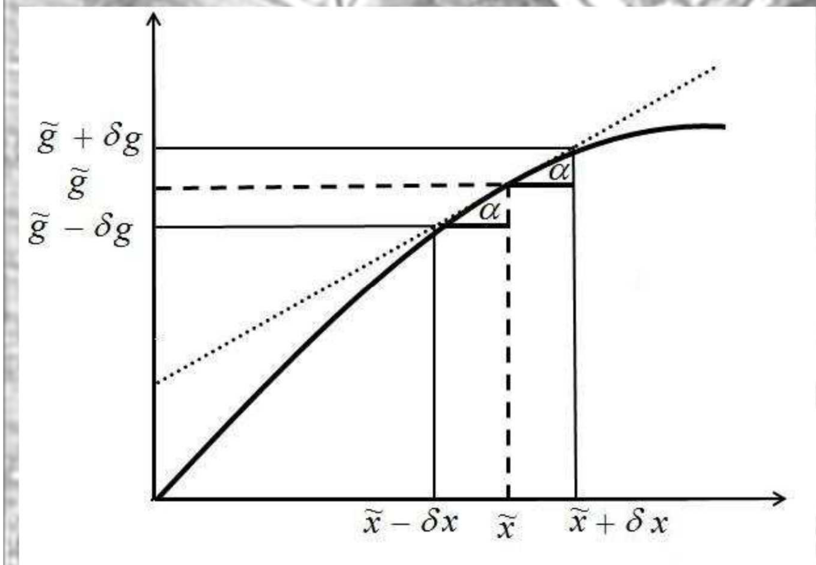
$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \frac{\delta x}{|x_{ms}|} + \frac{\delta y}{|y_{ms}|} + \frac{\delta z}{|z_{ms}|}$$

x, y, z dipendenti tra loro,

$$\frac{dg}{|g_{ms}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y_{ms}}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{z_{ms}}\right)^2}$$

x, y, z indipendenti tra loro.

Propagazione su relazioni funzionali



$$\frac{\delta g}{\delta x} \approx \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\right|$$

Una volta studiate le derivate si può anche introdurre.

Considerazioni

Per la propagazione segnaliamo che abbiamo utilizzato il simbolo δ, per intendere l'incertezza totale, ma si intende una piccola variazione rispetto ad un valore (per noi la migliore stima = misura).

Le regole valgono per qualsiasi tipo di incertezza (ε, η, δ), dato che ci si aspetta siano tutte piccole quantità.

Misuriamo di *g*

- Possiamo provare a misurare l'accelerazione gravitazionale *g* , per esempio con misure ripetute di una pallina lasciata cadere.

Oppure

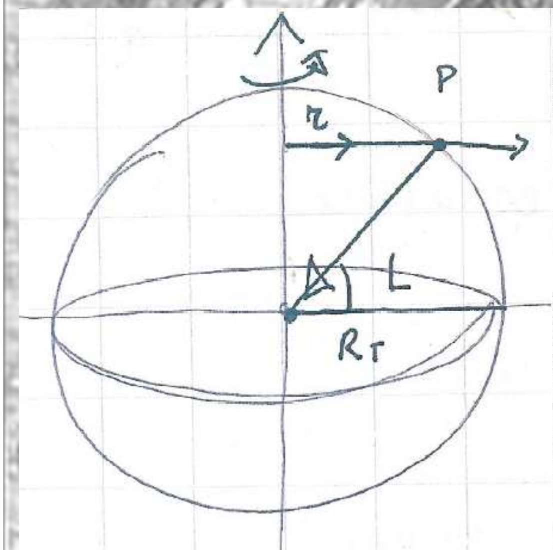
- Possiamo misurare con misure ripetute con il pendolo.

Seguiamo quest'ultimo approccio , in quanto pensiamo di avere più controllo

Stima a priori delle incertezze

- Stima a priori delle incertezze: serve per farsi un'idea di quale precisione si possa raggiungere. A cosa serve?
  - per iniziare a ragionare su quale incertezza domina maggiormente nella stima,
  - per iniziare, prima di andare in laboratorio, a vedere quali formule usare per la propagazione.

Perché questa precisione o cosa possiamo vedere?



- Per effetto della rotazione della terra, al variare della latitudine c'è la forza centrifuga: riduce l'accelerazione di gravità.
- All'equatore forza centrifuga massima:

$$g = 9.781 \text{ m/s}^2$$

- Ai poli forza centrifuga minima:

$$g = 9.831 \text{ m/s}^2$$

A Ferrara latitudine 44.83º:

$$g = 9.806 \text{ m/s}^2$$

Variazione totale di g: $\Delta g/g_{centrale}$ = 0.05/ 9.806 = 5.1 per mille ~ 5 ‰

A priori con un apparato, è verificabile l'effetto della forza centrifuga?

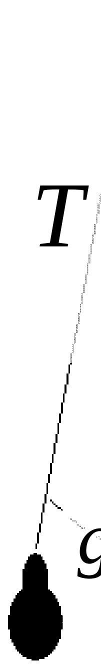
Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $T = t/N$:
  - $\delta T = \delta t/N$
    - *Non esageriamo però: tempo, attrito?*
- $g = 4\pi^2\, l/T^2$
  - $\dfrac{\delta g}{g} = \dfrac{\delta l}{l} + 2\dfrac{\delta T}{T}$

A priori solo incertezze di lettura (ε):

$$T = t / N$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Stima a priori: solo incertezze di lettura

- $\varepsilon_T = 1/3\ \varepsilon_t =$
  $= 1/3\ (1/2 * 1/100\ \mathrm{s}) =$
  $= 1.7\ 10^{-3}\ \mathrm{s}$
- $\varepsilon_l = 1/2\ (1\ \mathrm{mm}) = 0.5\ \mathrm{mm}$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = \frac{\varepsilon_l}{l} + 2\frac{\varepsilon_T}{T} = \frac{0.5\ \mathrm{mm}}{1200\ \mathrm{mm}} + \frac{1.7\ 10^{-3}\ \mathrm{s}}{2.2\ \mathrm{s}}$$

$$\frac{\varepsilon_g}{g} = 0.04\ \% + 0.08\ \% = 0.12\ \%$$

$$T = t / N$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Misuriamo e ….

Misure ripetute: 3 oscillazioni $t=3\,T$

$$T = t / N$$

	$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7
	Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P
i_{misura}	1	6.71	6.57	6.57	6.49	6.71	6.64	6.05
	2	6,.73	6.65	6.95	6.57	6.68	6.78	6.64
	3	6.67	6.75	6.42	6.73	6.74	6.73	6.11
	4	6.73	6.61	6.63	6.67	6.70	6.63	6.36
	5	6.70	6.57	6.73	6.66	6.79	6.65	6.87
	6	6.63	6.65	6.63	6.67	6.99	6.66	6.34
	7	6.76	6.69	6.83	6.67	6.90	6.63	6.25
	8	6.78	6.71	6.53	6.72	6.71	6.72	6.32
	9	6.57	6.49	6.66	6.65	6.65	6.62	6.65
	10	6.76	6.60	6.67	6.69	6.89	6.63	6.89

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

t_{medio}= 6.65 s

σ_t= 0.17 s

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

Incertezza casuale $\sigma_t / t = \sigma_T / T = 0.03$

Incertezza totale $(\delta t)^2 = \sigma_t^2 + \varepsilon_t^2 = (0.17\ \text{s})^2$

Incertezza su *l*

l [cm]	121.0	121.2	120.9	121.7	121.2	120.8	121.3
$j_{studente}$	1	2	3	4	5	6	7
Nome	G	A_s	M	A_t	R_s	R_b	P

l_{max} = 121.7 cm, l_{min} = 120.8 cm

Pochi dati per usare dev. St. e media:

$$l_{ms} = valore\ centrale = l_{val.\ centr.} = \frac{l_{max}+l_{min}}{2}$$

$$\frac{\Delta_l}{2} = semidispersione = \frac{l_{max}-l_{min}}{2}$$

Il massimo ed il minimo hanno anche un'incertezza di lettura, non contemplata nell'intervallo, si possono sommare in modo lineare o anche in quadratura:

$$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta_l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2$$

Per la dispersione si usa appositamente il simbolo Δ_l = $(l_{max} - l_{min})$, con l al pedice per distinguerlo dal semplice scarto Δl qualsiasi $=(l_2 - l_1)$.

Incertezza su *l*

$l_{val.\,centr.} = 121.25$ cm, $\frac{\Delta_l}{2} = 0.45$ cm

ε_l= 0.05 cm

$$(\delta l)^2 = \left(\frac{\Delta_l}{2}\right)^2 + (\varepsilon_l)^2 = 0.45\ cm \approx 0.5 \text{ cm}$$

$$\frac{\delta l}{l} = 0.4\ \%$$

A posteriori $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta T}{T} =$ 0.06 = 6 %

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

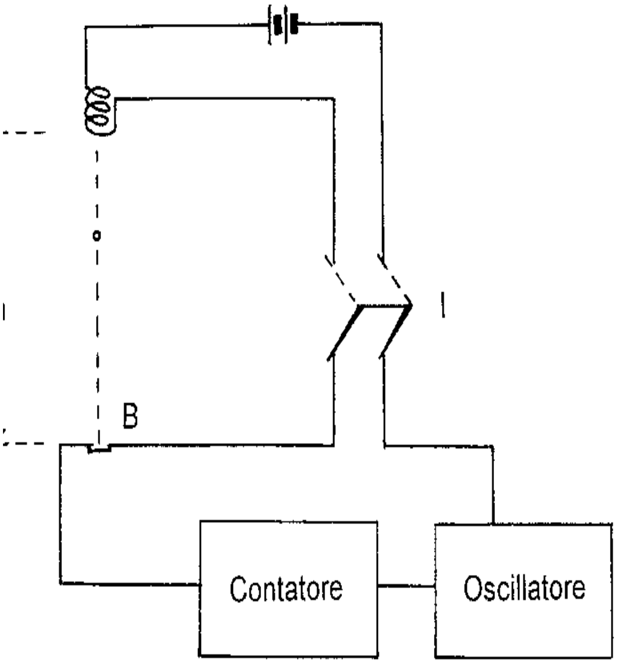
g	9.749524
δg=	0.584971

Otteniamo la misura di g = 9.7 $\pm$ 0.6 m s^{-2}

Confronto con il valore atteso

Estraimo quindi le misure d

maggiore precisione = maggiore complicazioneMisu



Precisione su intervalli di tempo con un oscillatore (impulsi/s), un contatore (ris. 1 impulso).

ncertezza a priori:

per t = 0.45 s,

100 000 impulsi al secondo, precisione: 0.5/45 000

$\varepsilon_t/t \sim 1/100\,000$.

Incertezza a priori su h = 1 m, stecca metrica (ris. 1 mm)

$\varepsilon_h/h \sim 0.5$ mm/ 1 000 mm.

Incertezza a priori su misura di g

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \equiv g = \frac{2h}{t^2}$$

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta h}{h} + 2\frac{\delta t}{t} \qquad \frac{\delta g}{g} = 0.0005 + 0.00002$$

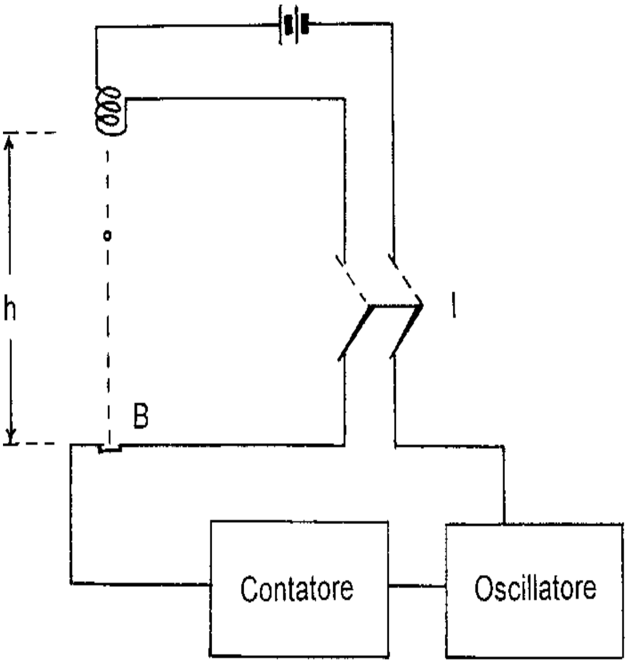
$$\frac{\delta g}{g} = \frac{0.5}{1\,000} + 2\frac{0.5}{45\,000}$$

0.52 per mille

≈ 5 su $10\,000$

Apparato per la misura precisa di *g:*

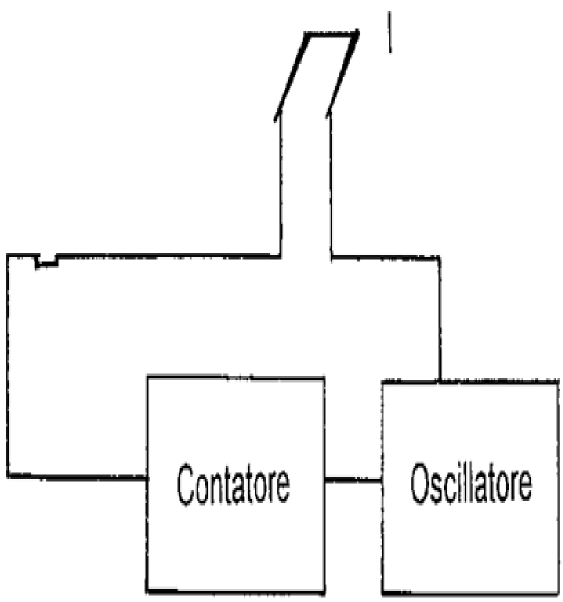
maggiore precisione = maggiore complicazione



- Misure del tempo:
  - Misura diretta del numero di impulsi durante la caduta: n.
  - Conversione da n a t sulla base della misura del numero di impulsi per unità di tempo
- n_{un} = impulsi/s

$$t = \frac{n}{n_{un}} \overset{\text{dim}}{\equiv} \frac{\text{impulsi}}{\text{impulsi/s}} = \text{s}$$

Misura del numero di impulsi al s: n_{un}



- Cronometriamo per un tempo fissato (2’) t_f il numero di impulsi che acquisisce il contatore n_f.

$$n_{un} = \frac{n_f}{t_f} \quad \left(\frac{\text{impulsi in } 2'}{120 \ \text{s}} \right)$$

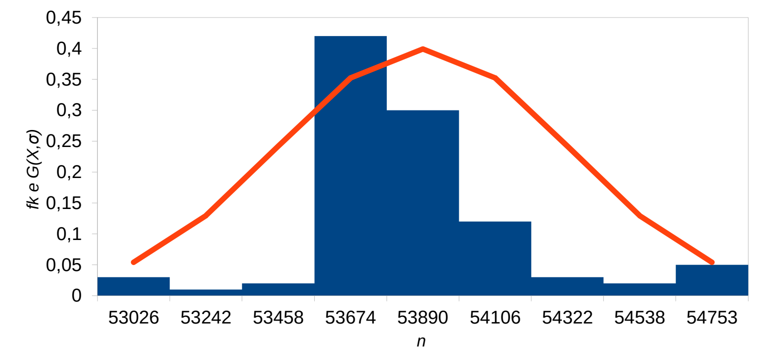
2 misure all’inzio dell’esperienza, 2 a metà, e 2 alla fine.

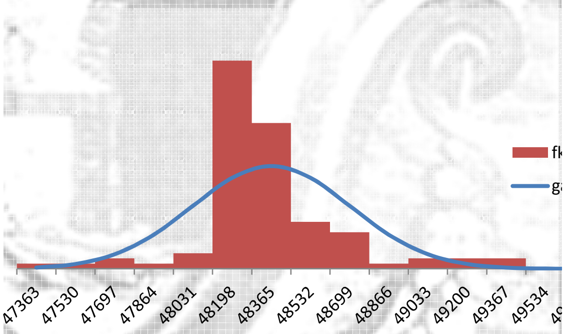
- Avremo 6 misure di n_{un}.
- n_{un}.= valore centrale $\pm$ semidispersione.

intervallo del 100 % dei dati osservati

Impulsi durante la caduta: *n* .

- *n* ripetuto per 100 volte (all'inizio, a metà ed alla fine di queste misura, si misura n_{un}).
- Studio della variabile osservata *n*: è gaussiana?





- Comunque n_{medio}, stima del valore di centralità *X*,
- σ_n stima del punto di flesso σ.

Incertezza su *n*

- Se *n* è gaussiana possiamo utilizzare per l'incertezza statistica la deviazione standard della media ($\sigma_n/\sqrt{N}$, *N* è il numero di dati)
- Se *n* non è gaussiana una buona stima dell'incertezza statistica è la deviazione standard del campione (σ_n : calc., excel).
- L'incertezza su *n* deve contenere l'incertezza dovuta alla risoluzione (detta di lettura vedi strumenti digitali ε_n)

n non gaussiana

$$\delta n = \sqrt{\sigma_n^2 + \varepsilon_n^2}$$

n gaussiana

$$\delta n = \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{N} + \varepsilon_n^2}$$

Misura del tempo di caduta: *t*.

- Dalla relazione $t = n/n_{un}$
  - La migliore stima di t (t_{ms}) si ha da
    - n_{media} $\quad \overline{n}$
    - n_{un} valore centrale $\hat{n}_{un}$
      - $t = n/n_{un}$ $\quad t_{ms} = \dfrac{\overline{n}}{\hat{n}_{un}}$
- Qual è l'incertezza sul tempo di caduta?

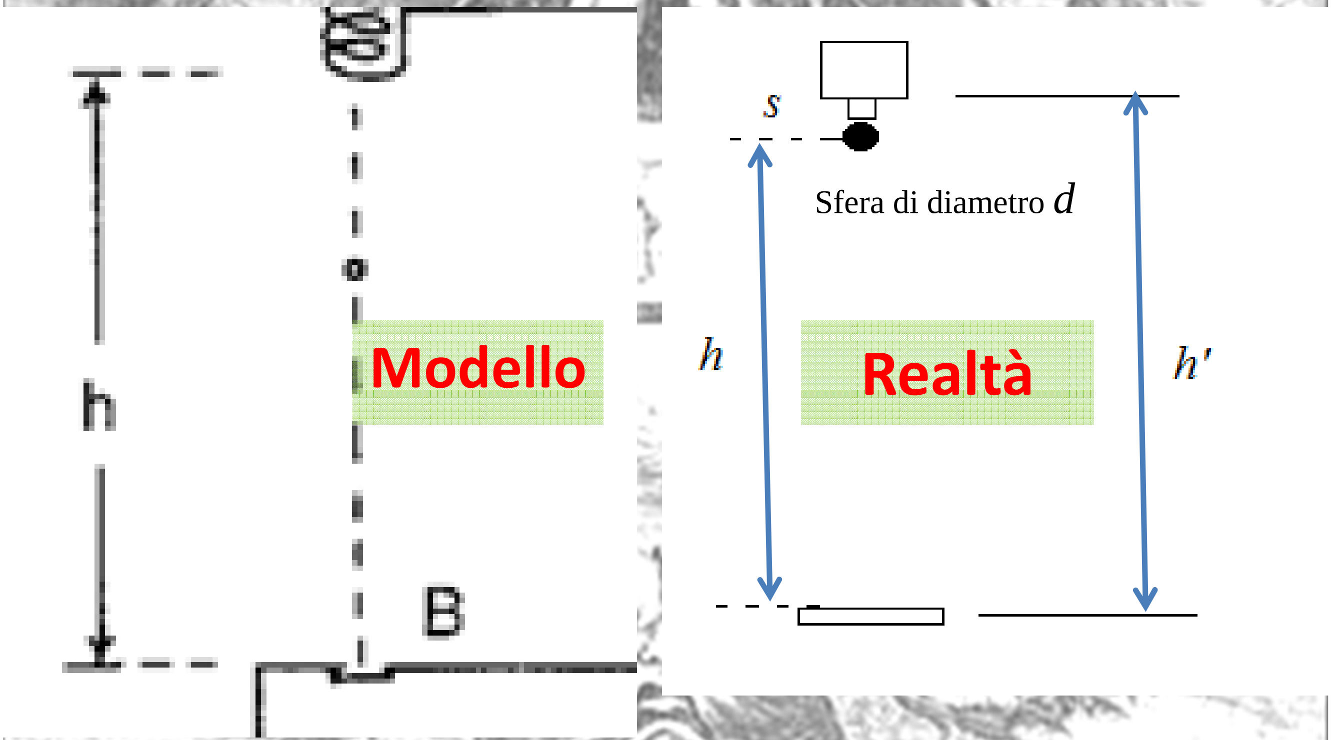
Incertezza su t

- Si propaga l'incertezza totale relativa:

$$\frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{n} + \frac{\delta n_{un}}{n_{un}} \equiv \frac{\delta t}{t} = \frac{\delta n}{\overline{n}} + \frac{\delta n_{un}}{\hat{n}_{un}}$$

- δn vedi situazione osservata (Gauss, non Gauss).
- $\dfrac{\Delta n_{un}}{2}$ semidispersione $\underline{=}$ incertezza di lettura (ε).

Per misurare *g* oltre a *t* serve *h*



Incertezza su *h*

- Ovviamente va osservato sull'apparato
  - Si osserva che l'interruttore si attiva quando metà sferetta entra nell'interruttore.

$$h = h' - s - \frac{d}{2}$$

$$\delta h = \varepsilon_{h'} + \varepsilon_s + \frac{1}{2}\varepsilon_d$$

  - Solo incertezze di lettura: *h* misurata con regolo, *s* e *d* misurati con calibro.

Accettiamo il valore atteso?