

VISUALIZZAZIONE SINOTTICA DI GRANDEZZE ENERGETICHE IN UN'ONDA SONORA PIANA QUASI STAZIONARIA

Martina Buiat, Giorgio Sacchi, Domenico Stanzial

CNR-IDAS "Corbino" Sezione di Ricerca di Ferrara, c/o Dipartimento di FISICA
dell'Università di Ferrara, v. Saragat, 1- 44122 Ferrara, domenico.stanzial@cnr.it

1. Introduzione

Uno dei modelli canonici per lo studio dell'Energetica acustica, cioè della disciplina teorico-sperimentale che studia i flussi radiativi e oscillatori dell'energia sonora sulla base della formulazione quadridimensionale del tensore energia-impulso per il campo acustico [1,2,3] è quello dell'onda piana quasi-stazionaria. Chiaramente, l'enorme importanza di questo modello discende dalla necessità di formulare quantitativamente il fondamentale fenomeno della riflessione considerandone ogni implicazione energetica. Con questo lavoro ci proponiamo dunque di simulare numericamente e visualizzare graficamente l'andamento di diverse grandezze energetiche nel caso di un'onda sonora piana quasi-stazionaria; in particolare, s'inizierà lo studio dal caso più semplice di onda monocromatica, applicando tuttavia in modo sistematico i metodi dell'energetica acustica con lo scopo di trarre conclusioni utili anche in vista di successive generalizzazioni.

L'onda piana quasi-stazionaria può essere definita, nel caso qui considerato, come la sovrapposizione di due componenti, una progressiva e una regressiva, che hanno il significato fisico di onda incidente e riflessa con angolo di riflessione nullo. Le onde componenti hanno dunque la stessa direzione, ma si muovono in versi opposti e nel caso monocromatico hanno la stessa frequenza. Seguendo lo schema dell'energetica acustica, il campo risultante soluzione dell'equazione d'onda, si rappresenta tramite il potenziale di velocità $\phi(x, t)$ che è dato dall'espressione:

$$(1) \quad \phi(x, t) = ac[e^{i(kx-\omega t)} + Re^{i(kx+\omega t+\theta)}] \quad [\text{m}^2/\text{s}]$$

Dove a è l'ampiezza della vibrazione dell'aria (*displacement*), $k = \omega / c$ è il numero d'onda, $0 \leq R \leq 1$ è il fattore di scala dell'onda di potenziale riflessa e θ è l'angolo di fase tra la componente incidente e quella riflessa. La forma scelta per il potenziale cinetico è tale che la direzione di propagazione dell'onda incidente sia parallela all'asse delle ascisse e abbia lo stesso verso. Le soluzioni di pressione e velocità derivate da (1) sono rispettivamente:

$$(2) \quad p(x,t) = \left(a z_0 (i\omega) \left[e^{i(kx - \omega t)} - R e^{i(kx + \omega t + \vartheta)} \right] \right) \quad [\text{Pa}]$$

$$(3) \quad v(x,t) = \left(a (i\omega) \left[e^{i(kx - \omega t)} + R e^{i(kx + \omega t + \vartheta)} \right] \right) \quad [\text{m/s}]$$

dove $z_0 = \rho_0 c$ è l'impedenza caratteristica dell'aria.

Come noto è l'effetto combinato delle soluzioni (2) e (3) che è responsabile del trasporto di energia all'interno del campo acustico descritto dal potenziale (1). Da queste due soluzioni (osservabili acustici), verranno dunque derivate nel seguito alcune grandezze definite nell'ambito dell'energetica acustica: da quelle fondamentali come la densità di energia acustica $w(x,t)$ e la densità di flusso di energia acustica (intensità del suono) $j(x,t)$ a quelle più sofisticate come gli indicatori energetici η e ξ [1,3] le cui espressioni esplicite in funzione di R e ϑ verranno utilizzate per la simulazione del campo sonoro rappresentato dal potenziale (1).

Questo approccio permette chiaramente l'immediato confronto del modello qui simulato con eventuali dati sperimentali ottenuti con l'intensimetria p-v ed offre al contempo una chiave di lettura complementare dei modelli per il campo d'onda quasi-stazionaria basati sul calcolo dell'impedenza [4].

2. Materiali e metodi

La simulazione è stata realizzata grazie ad un algoritmo scritto in linguaggio Matlab®, nel quale una volta fissati i parametri iniziali si calcolano le grandezze energetiche di interesse. I parametri utilizzati sono i seguenti: $f = 429$ Hz ; $c = 343.4$ m/s; $\rho_0 = 1,204$ kg/m³ ; $L_p = 95$ dB. Il livello di pressione, che è qui utilizzato per calcolare il valore dell'ampiezza del potenziale cinetico secondo la formula $a = p_{RMS}/\omega\rho_0c$ dove $p_{RMS} = p_0 \cdot 10^{L_p/20}$, è stato mutuato da dati sperimentali attualmente in via di elaborazione. Si ottiene in questo modo un valore di $a = 1.0046 \cdot 10^{-6}$ m.

Applicando l'operatore di media stazionaria si ottengono le forme analitiche delle grandezze energetiche quali l'intensità attiva (o radiativa) A e le densità medie di energia potenziale w_u e cinetica w_k :

$$(4) \quad A = \langle pv \rangle = \frac{1}{2} z_0 (a\omega)^2 (1 - R^2) \quad [\text{W/m}^2]$$

$$(5) \quad w_u = \frac{1}{2\rho_0c^2} \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 (a\omega)^2 \left[\frac{1+R^2}{2} - R \cos(kx + \vartheta) \right] \quad [\text{J/m}^3]$$

$$(6) \quad w_k = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 (a\omega)^2 \left[\frac{1+R^2}{2} + R \cos(kx + \vartheta) \right] \quad [\text{J/m}^3]$$

da cui si ricava l'espressione della densità media dell'energia totale

$$(7) \quad w_{tot} = w_u + w_k = \frac{1}{2} \rho_0 (a\omega)^2 (1 + R^2) \quad [\text{J/m}^3]$$

Dalle espressioni (4), (5) e (6) si può ora calcolare - normalizzandola a c - la velocità η a cui viaggia l'energia all'interno del campo d'onda, e il fattore di potenza ξ della corrente di energia sonora [3] in funzione di R e ϑ . Si ottengono così le seguenti espressioni:

$$(8) \quad \eta = \frac{A}{c(w_u + w_k)} = \frac{1 - R^2}{1 + R^2}$$

$$(9) \quad \xi = \frac{A}{2c\sqrt{w_u w_k}} = \frac{1 - R^2}{\sqrt{(1 + R^2)^2 - 4R^2 \cos^2(2kx + \vartheta)}}; \quad \Delta\varphi = \cos^{-1}(\xi) \quad [\text{rad}]$$

dove $\Delta\varphi$ è la *sfasatura efficace* tra l'onda di pressione e quella di velocità. Gli andamenti di queste grandezze (8), (9), in funzione dell'ampiezza R della componente riflessa e della sfasatura tra le componenti incidente e riflessa, sono riportati nelle Figure 3,4,5.

Nel paragrafo che segue, si riporta la visualizzazione sinottica di tutte le grandezze energetiche definite sopra.

3. Visualizzazione sinottica dei risultati della simulazione

I grafici delle Figure 1 e 2 riportano gli andamenti delle densità medie di energia (5), (6) e (7) per valori di R crescente da 0.25 a 1 (onda perfettamente stazionaria). Si noti che il modello (chiaramente ideale) prevede che la densità di energia totale rimanga fissa anche quando $R = 1$.

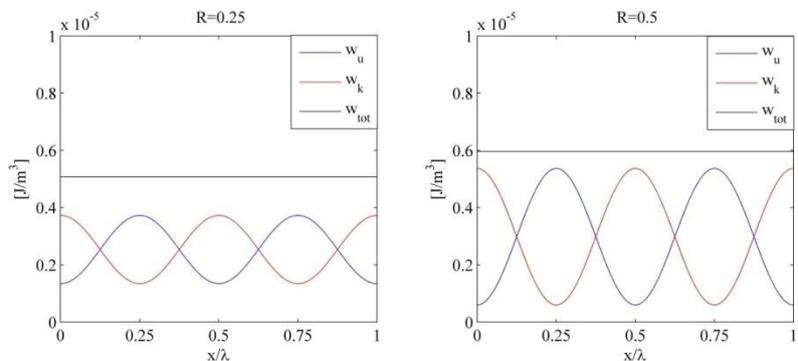


Figura 1 - Andamento di w_u , w_k e w_{tot} per $R = 0.25$ (sx) e $R = 0.5$ (dx), $\vartheta = 0$.

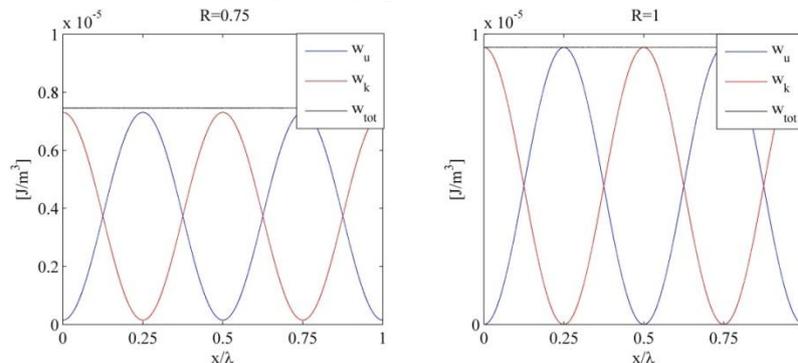


Figura 2 - Andamento di w_u , w_k e w_{tot} per $R = 0.75$ (sx) e $R = 1$ (dx), $\vartheta = 0$.

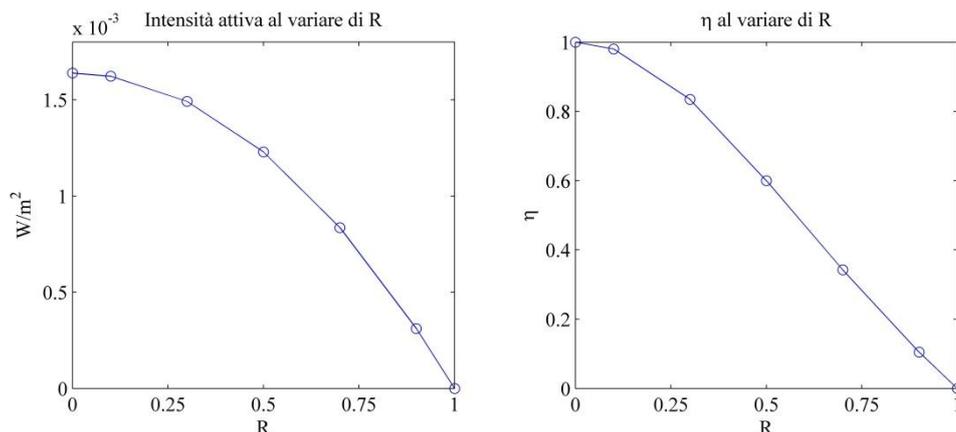


Figura 3 - Andamento dell'intensità attiva A e di η al variare di R

In Figura 3 sono visualizzati, a sinistra, i valori in W/m^2 dell'intensità attiva quando R assume gli stessi valori riportati in Fig. 4; a destra, sono invece riportati i corrispondenti valori della velocità dell'energia sonora misurata in unità c .

Le Figure 4 e 5 mostrano infine il fattore di potenza ξ e la sfasatura efficace $\Delta\phi$ dell'onda concatenata di pressione-velocità quando si sposta lungo x su una finestra spaziale pari ad 1 lunghezza d'onda al variare di R e ϑ .

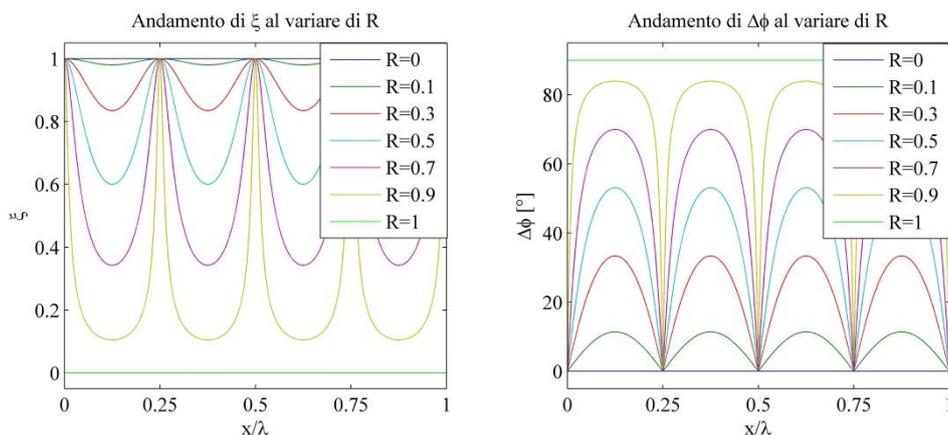


Figura 4 - Andamento di ξ e di $\Delta\phi$ al variare di R ; $\vartheta = 0$

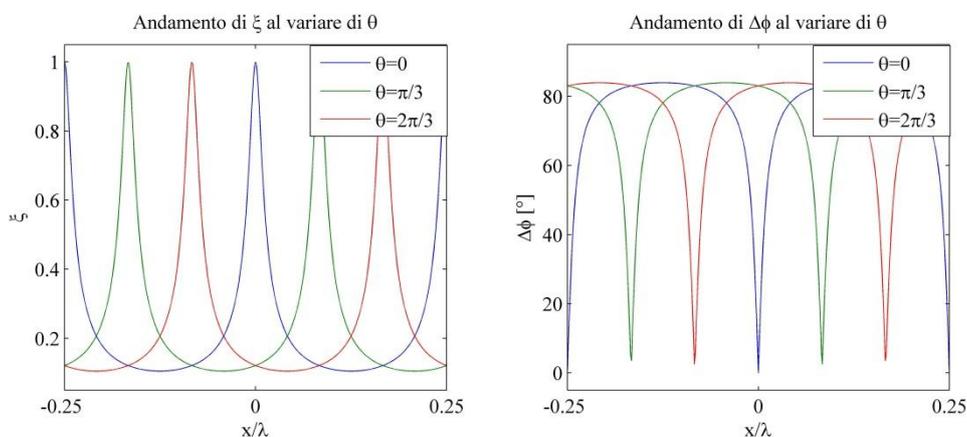


Figura 5 - Andamento di ξ e di $\Delta\phi$ al variare di ϑ ; $R = 0.9$

4. Discussione

Nelle figure 1 e 2 si vede chiaramente che l'effetto di aumentare l'ampiezza dell'onda riflessa è quello di accentuare i massimi e i minimi delle densità di energia potenziale e cinetica, nonché di aumentare il livello della densità di energia totale fino a un massimo di $w_{tot} = a^2 \omega^2 \rho_0$. Questa rimane uniformemente distribuita lungo tutto il cammino dell'onda pressione-velocità che rimane ferma (onda perfettamente stazionaria) o trasporta energia verso destra (onda quasi-stazionaria), secondo la scelta compiuta per la forma del potenziale (1). La Fig. 4 mostra invece il valore del modulo dell'intensità radiativa al variare di R : esso diminuisce col crescere di R indicando chiaramente che il flusso di energia assorbita (e perciò irradiata dal campo) è massimo quando l'onda pressione-velocità che opera il trasporto energetico è completamente progressiva. Questo fatto è reso ancora più esplicito dal modulo della velocità dell'energia che essendo qui normalizzato a c (v. Eq. (8)) è uguale a 1 quando il trasporto dell'energia avviene alla stessa velocità di propagazione delle onde sonore (v. Fig. 3, grafico di destra). Le figure 4 e 5 mostrano rispettivamente cosa succede al fattore di potenza ξ dell'onda pressione-velocità quando varia l'ampiezza R della componente riflessa del suono e quando varia la differenza di fase ϑ tra la componente incidente e quella riflessa. L'effetto della variazione di R è quello di "swattare" la potenza dell'onda quando R aumenta: è tuttavia estremamente significativo il fatto che comunque per tutti i valori di $0 < R < 1$ il fattore di potenza raggiunga sempre il massimo valore con una densità spaziale costante pari a $\lambda/4$. L'effetto della variazione di θ è semplicemente quello di traslare spazialmente i punti di massima potenza ($\xi = 1$). Lo stesso fenomeno è illustrato anche dalle figure 4 e 5, dove si riportano gli andamenti degli sfasamenti efficaci tra le onde di pressione e velocità rispettivamente al variare di R e ϑ . Chiaramente, qui la massima potenza radiativa del suono si ha per uno sfasamento nullo.

5. Bibliografia

- [1] Stanzial D., Prodi N., Schiffrer G., Reactive acoustic intensity for general fields and energy polarization, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 99 (4), Pt. 1, p. 1868-1876, 1996.
- [2] Stanzial D., Bonsi D., Schiffrer G., Linear Theory of Acoustic Fields and Radiation Pressure, Acta Acustica United with Acustica, vol. 89 (2); p. 213-224, (2003).
- [3] Stanzial D., Sacchi G., Schiffrer G., On the physical meaning of the power factor in acoustics, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 131, (1), 2012.
- [4] Fahy F.J., *Sound Intensity*, (§ 3.7.3, pp.33-34), Elsevier Applied Science, 1989.