

ASSOCIAZIONE
ITALIANA
DI ACUSTICA



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PERUGIA

ATTI del
25^o Congresso
Nazionale
AIA

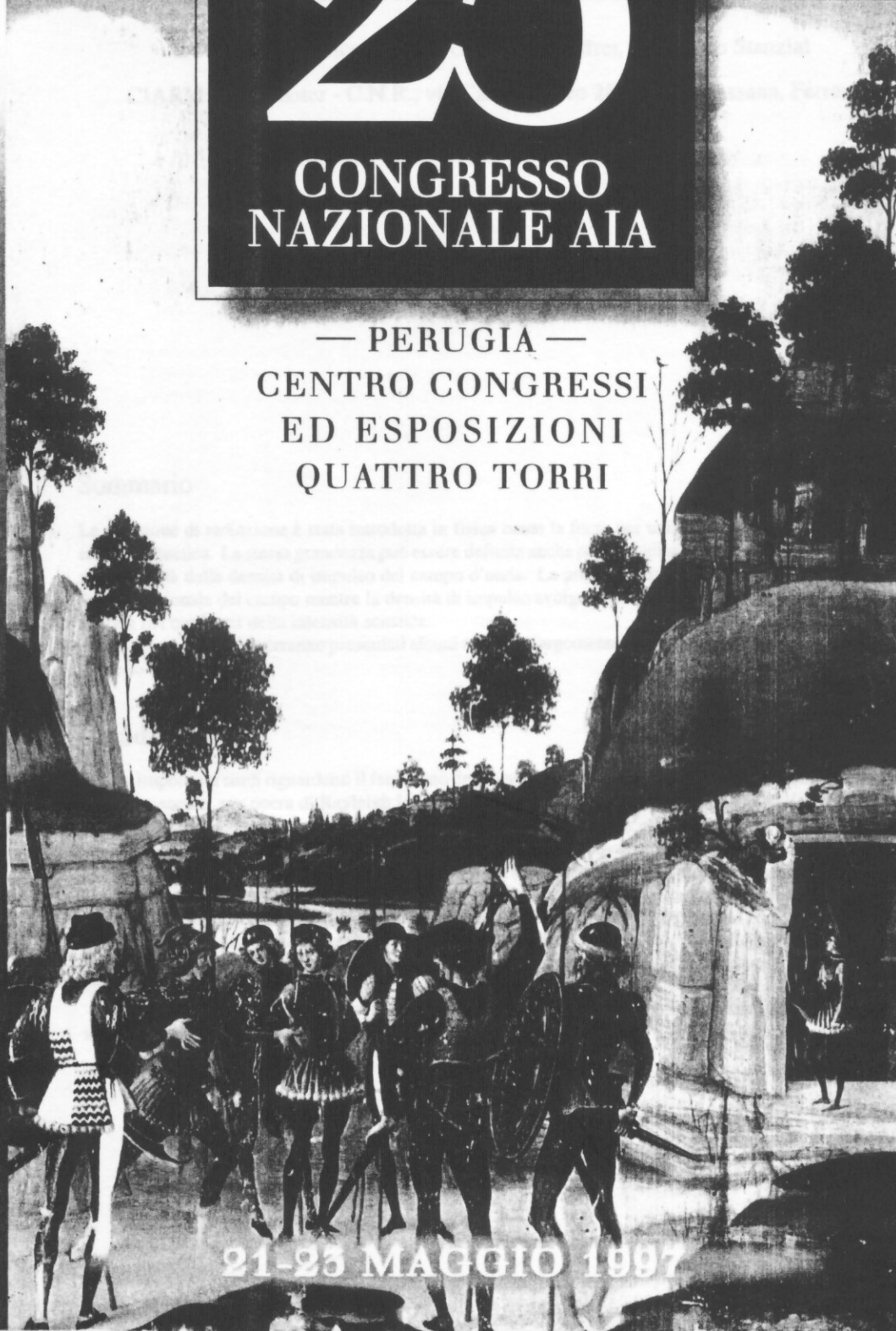
Volume I

25^o

CONGRESSO NAZIONALE AIA

— PERUGIA —
CENTRO CONGRESSI
ED ESPOSIZIONI
QUATTRO TORRI

21-23 MAGGIO 1997



dove, data la densità di energia potenziale dipendente dalla pressione acustica p , è presente il contributo cinetico dovuto alla velocità v della particella (tra a ingrandire: caratteristiche del mezzo). In termini analoghi a quanto avviene qui in acustica, vale per l'energia una legge di conservazione di Noether di importanza. In acustica di seguito questa assume la forma:

Note sulla pressione di radiazione sonora

Davide Bonsi, Nicola Prodi, Giuliano Schiffrer, Domenico Stanzial

CIARM c/o Cemoter - C.N.R., via Canal Bianco 28 - 44044 Cassana, Ferrara

Un'onda, reale o fittizia, nel mezzo di tipo elastico, è caratterizzata anche da una densità di impulso, rappresentabile per mezzo della grandezza vettoriale: $\mathbf{w} = \rho \mathbf{v}$, dove ρ è la densità acustica (che non confondersi con la densità ρ del mezzo imperturbato). Una, poiché anche la quantità di moto del campo d'onda obbedisce ad una legge di conservazione, una variazione temporale di un'onda è una volta associata alla divergenza di un flusso, la teoria vettoriale dell'impulso impone tuttavia che tale flusso sia di tipo tensoriale, necessariamente una matrice 3×3 , dal momento che sono 3 le equazioni di continuità a dover essere soddisfatte, in definitiva:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \nabla_j T_{ij} = 0 \quad (1)$$

La grandezza parante la densità di flusso d'impulso dell'onda è perciò il tensore di momento degli impulsi: analogamente al caso di un solido T rappresenta anche la deformazione di un volume elementare di materia sottoposto ad un campo di forze. La sua forma esplicita è la seguente (2):

$$T_{ij} = \left(\begin{array}{ccc} \lambda + 2\mu & \mu & \mu \\ \mu & \lambda + 2\mu & \mu \\ \mu & \mu & \lambda + 2\mu \end{array} \right) \quad (2)$$

Sommario

La pressione di radiazione è stata introdotta in fisica come la forza per unità di area esercitata da un'onda elettromagnetica. La stessa grandezza può essere definita anche per i campi sonori, sulla base dell'equazione di continuità della densità di impulso del campo d'onda. La pressione di radiazione è interpretabile come forza direzionale del campo mentre la densità di impulso svolge un ruolo analogo a quello della densità di energia nei confronti della intensità acustica.

In questa memoria verranno presentati alcuni studi sull'argomento, condotti tramite simulazioni di campi modello e misure.

Introduzione

I primi importanti studi riguardanti il fenomeno della forza esercitata dalle onde acustiche risalgono all'inizio di questo secolo, per opera di Rayleigh [1], il quale definì la pressione di radiazione uguale alla differenza tra la pressione media agente su di una superficie solidale con la particella d'aria (pressione di Lagrange) e la pressione presente nel mezzo in condizioni di riposo. Successivamente Langevin, nei suoi studi degli anni '30, concepì invece la grandezza come differenza tra la forza media per unità di area su di una superficie fissa e la pressione presente dal lato opposto della stessa superficie nello stesso mezzo [2]. Un approfondimento critico dell'argomento, in tempi relativamente recenti, ha poi permesso di capire che i due fenomeni sono di natura diversa: il primo (pressione di radiazione di Rayleigh) è non lineare, in quanto conseguenza della non linearità dell'equazione di stato adiabatica dei gas [3], il secondo (pressione di radiazione di Langevin) è un effetto presente anche nell'acustica lineare [4,7]. Quest'ultimo caso sarà l'oggetto della nostra discussione.

E' noto che la densità di energia totale, presente in ogni istante di tempo in un punto qualsiasi di un'onda sonora, è data dalla espressione:

$$w = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{p^2}{z^2} + v^2 \right) \quad (1)$$

dove, oltre al termine di energia potenziale dipendente dalla pressione acustica p , è presente il contributo cinetico dovuto alla velocità \mathbf{v} della particella (con z impedenza caratteristica del mezzo). In maniera analoga a quanto avviene per la massa, vale per l'energia una legge di conservazione di fondamentale importanza. In assenza di sorgenti questa assume la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

con

$$\mathbf{j} = p\mathbf{v} \quad (3)$$

che, comunemente denominata intensità acustica, è la densità di flusso di energia del campo d'onda. La (2) indica in sostanza che una variazione di energia acustica in un volume fissato viene bilanciata da un flusso attraverso la superficie che lo circonda; questo flusso sarà entrante o uscente a seconda che l'energia aumenti o diminuisca.

Un'onda, nella fattispecie un'onda di tipo acustico, è caratterizzata anche da una densità di impulso, rappresentabile per mezzo della grandezza vettoriale $\mathbf{m} = \rho_1 \mathbf{v}$, dove ρ_1 è la densità acustica (da non confondersi con la densità ρ del mezzo imperturbato). Ora, poiché anche la quantità di moto del campo d'onda obbedisce ad una legge di conservazione, una variazione temporale di \mathbf{m} sarà a sua volta associata alla divergenza di un flusso; la natura vettoriale dell'impulso impone tuttavia che tale flusso sia di tipo tensoriale, precisamente una matrice 3×3 , dal momento che sono 3 le equazioni di continuità a dover essere soddisfatte. In definitiva:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathfrak{T} = 0 \quad (4)$$

\mathfrak{T} costituisce pertanto la densità di flusso d'impulso dell'onda e prende il nome di tensore degli sforzi acustici; analogamente al caso di un solido \mathfrak{T} rappresenta anche la deformazione di un volume elementare di materia sottoposto ad un campo di forze. La sua forma esplicita è la seguente [5]:

$$\mathfrak{T} = \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + \frac{p^2}{z^2}) & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & \frac{1}{2} (v_2^2 - v_3^2 - v_1^2 + \frac{p^2}{z^2}) & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & \frac{1}{2} (v_3^2 - v_1^2 - v_2^2 + \frac{p^2}{z^2}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

La densità di impulso \mathbf{m} , originata dalla perturbazione ondosa, è inoltre strettamente collegata alla intensità \mathbf{j} , si verifica infatti che:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{j}}{c^2} \quad (6)$$

dove c è la velocità del suono. Questa relazione è del tutto generale (vale ad esempio anche per le onde elettromagnetiche, dove però \mathbf{j} e c rappresentano rispettivamente il vettore di Poynting e la velocità della luce) e costituisce un legame generale tra le due equazioni di continuità (2) e (4).

Definizione e proprietà

Se si integra la relazione (4) su un volume V , di superficie S , si ricava:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{m} d^3 \mathbf{x} = - \int_V \nabla \cdot \mathfrak{T} d^3 \mathbf{x} = - \int_S \mathfrak{T} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{x} \quad (7)$$

dove l'ultima uguaglianza vale in virtù del teorema della divergenza. La (7) non è altro che l'equazione di Newton:

$$\frac{d\mathbf{m}_V}{dt} = \mathbf{F}. \quad (8)$$

Risulta quindi naturale interpretare il tensore \mathfrak{T} in base alla seguente classificazione:

- \mathfrak{T} : densità di flusso di impulso (N/m^2)
- $-\nabla \cdot \mathfrak{T}$: densità di forza (N/m^3)
- $-\mathfrak{T} \cdot \mathbf{n}$: pressione di radiazione (N/m^2)

Dedichiamo ora la nostra attenzione all'ultima grandezza, la quale rappresenta il vettore della pressione \mathbf{p}_{rad} che la radiazione acustica esercita su di una superficie di normale \mathbf{n} ; essa è del secondo ordine in p e \mathbf{v} e vale (a meno del segno):

$$\mathbf{p}_{rad} = \rho \left[v_n \mathbf{v} + \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{z^2} - v^2 \right) \right] \quad (9)$$

la componente normale $\mathbf{p}_{rad} \cdot \mathbf{n}$ è data da

$$p_{rad,n} = \frac{1}{2} \rho \left(v^2 \cos 2\theta + \frac{p^2}{z^2} \right) \quad (10)$$

avendo indicato con v_n e θ rispettivamente la proiezione di \mathbf{v} su \mathbf{n} e l'angolo fra i due vettori. Dalla (10) si può vedere che per un qualsiasi campo acustico si ha

$$-\mathcal{L} \leq p_{rad,n} \leq w \quad (11)$$

dove w è la densità di energia (vedi eq. (1)) e $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(v^2 - \frac{p^2}{z^2} \right)$ la densità di lagrangiana [5].

Simulazioni e misure

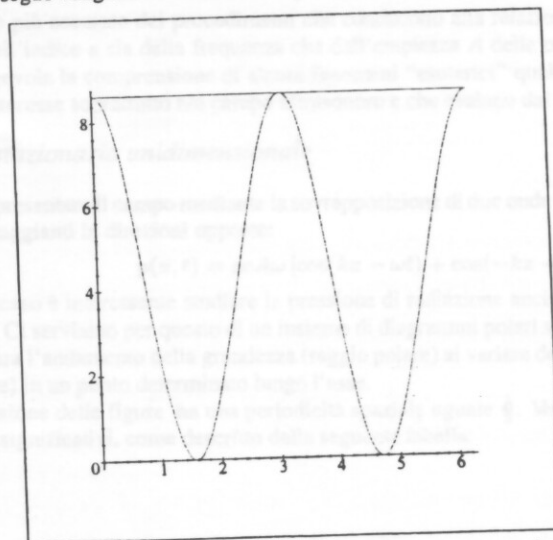
Per meglio comprendere la natura della pressione di radiazione e la dipendenza dalle altre grandezze acustiche, se ne è studiato il comportamento medio analizzando al calcolatore alcuni campi elementari. Nel seguito considereremo quindi le grandezze P_{rad} , W , L , K , V (pressione di radiazione, densità di energia, lagrangiana, densità di energia cinetica, densità di energia potenziale) come medie stazionarie delle rispettive quantità istantanee introdotte precedentemente.

1 Onda piana armonica progressiva unidimensionale

La pressione sonora istantanea è data da:

$$p(x, t) = \rho c A w \cos(kx - \omega t) \quad (12)$$

dove, oltre all'usuale simbologia [6], A indica l'ampiezza (costante) delle oscillazioni delle particelle d'aria. Per ogni orientazione si verifica $0 \leq P_{rad,n} \leq W$ (poiché $\langle p^2 \rangle = z^2 \langle v^2 \rangle$), dove il massimo si ottiene lungo la direzione di propagazione ed il minimo nella direzione normale; non c'è inoltre dipendenza dal verso. Nella figura che segue vengono mostrate le due grandezze W e $P_{rad,n}$ su di un unico grafico.

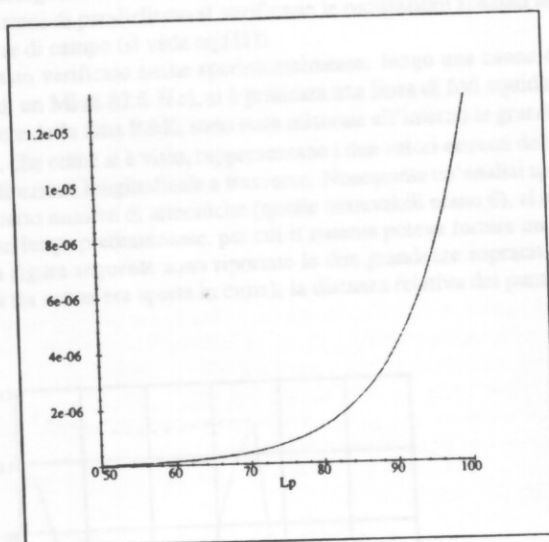


Onda piana progressiva: pressione di radiazione in funzione della normale al piano di misura e densità di energia (valore costante). La scala delle ascisse è in radianti, l'ordinata in unità arbitrarie.

E' possibile valutare l'entità di $P_{rad,n}$, rispetto al livello di pressione sonora L_p , dall'indicatore:

$$\epsilon = \frac{W}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} = \frac{p_{ref}}{z_c} \sqrt{10 \frac{L_p}{10}} \quad (13)$$

($p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$ è la pressione sonora di riferimento) che esprime il rapporto tra la pressione di radiazione nella direzione di propagazione e la radice della pressione sonora quadratica media. Quest'ultima è infatti interpretabile come ordine di grandezza della forza per unità di superficie dovuta a p . Per i livelli sonori usualmente incontrati negli ambienti di vita quotidiana si ricava il grafico della figura seguente, da cui si capisce che la forza della radiazione è solitamente piuttosto piccola, ma è via via più importante all'aumentare del livello.



Onda piana progressiva: indicatore ϵ in funzione del livello di pressione sonora (50-100 dB).

Uno studio più accurato dei procedimenti che conducono alla relazione (13) permette di esplicitare la dipendenza dell'indice ϵ sia dalla frequenza che dall'ampiezza A delle oscillazioni delle particelle di fluido; questo agevola la comprensione di alcuni fenomeni "esoterici" quali venti, fontanelle acustiche ecc.: fenomeni d'interesse soprattutto nel campo ultrasonoro e che esulano dai nostri scopi attuali.

2 Onda stazionaria unidimensionale

Possiamo rappresentare il campo mediante la sovrapposizione di due onde piane progressive della medesima ampiezza e viaggianti in direzioni opposte:

$$p(x, t) = \rho c A \omega [\cos(kx - \omega t) + \cos(-kx - \omega t)] \quad (14)$$

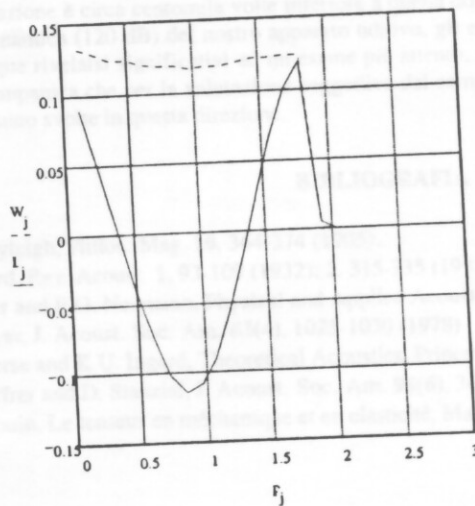
In questo caso è interessante studiare la pressione di radiazione anche in funzione del punto di misura lungo l'onda. Ci serviamo per questo di un insieme di diagrammi polari sovrapposti (Fig. 1), in cui ciascuna traccia raffigura l'andamento della grandezza (raggio polare) al variare dell'angolo tra l'asse ed il versore n (angolo polare) in un punto determinato lungo l'asse.

La successione delle figure ha una periodicità spaziale uguale $\frac{\lambda}{2}$. Vengono riportati a questo proposito quattro punti significativi, come descritto dalla seguente tabella:

| Linea # | Posizione (x) | Relazione tra K e V |
|---------|---|--|
| 1 | $h \cdot \frac{\lambda}{2}$ ($h = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) | $K = 0, V = \max.$ (nodo di velocità) |
| 2 | $\frac{\lambda}{16} + h \cdot \frac{\lambda}{2}$ | $K < V$ |
| 3 | $\frac{\lambda}{8} + h \cdot \frac{\lambda}{2}$ | $K = V$ |
| 4 | $\frac{\lambda}{4} + h \cdot \frac{\lambda}{2}$ | $V = 0, K = \max.$ (nodo di pressione) |

Va sottolineato che per un piano ortogonale all'asse il valore di $P_{rad,n}$ rimane costante e coincide con la densità di energia, mentre in condizioni di parallelismo si verificano le oscillazioni spaziali tipiche della densità di lagrangiana di questo genere di campo (si veda eq.(11)).

Il fenomeno appena descritto è stato verificato anche sperimentalmente: lungo una canna d'organo di legno, lunga circa 1.8 m (si trattava di un Mi di 82.5 Hz), si è praticata una linea di fori equidistanti e, per mezzo di un sistema sonda-analizzatore della ditta B&K, sono state misurate all'interno le grandezze $\langle p^2 \rangle$ e $\langle v^2 \rangle$. Da queste si è risaliti a W e L , che come si è visto, rappresentano i due valori estremi della pressione di radiazione, rispettivamente nella direzione longitudinale e trasversa. Nonostante un'analisi spettrografica abbia confermato la presenza di un certo numero di armoniche (quelle osservabili erano 6), si è visto che il livello della fondamentale era di gran lunga predominante, per cui il sistema poteva fornire un interessante raffronto con la simulazione. Nella figura seguente sono riportate le due grandezze sopracitate, sia nella regione interna che oltre la sommità (la canna era aperta in cima); la distanza relativa dei punti di misura è 12 cm.



Canna d'organo: $P_{rad,n}$ longitudinale (linea sopra) e trasversale (linea sotto). L'ordinata è in Pa, l'ascissa in m.

Come previsto, il valore della pressione di radiazione longitudinale, quella agente su un piano normale alla sezione della canna, resta con buona approssimazione costante; nella direzione trasversa si verifica invece un'oscillazione estremamente marcata, su una scala di mezza lunghezza d'onda del tono fondamentale.

3 Interferenza bidimensionale di due onde piane

Si tratta della generalizzazione del caso precedente, in cui l'interferenza avveniva lungo una sola dimensione. Il campo di pressione può essere scritto:

$$p(x, y, t) = \rho c A \omega [\cos(kx \cdot \sin \theta + ky \cdot \cos \theta - \omega t) + \cos(kx \cdot \sin \theta - ky \cdot \cos \theta - \omega t)] \quad (15)$$

dove x e y sono i due assi cartesiani ortogonali, bisettrici delle due direzioni di propagazione, e θ angolo polare relativo a y . Nel caso di $\theta \neq \pi/2$ l'espressione vale anche come rappresentazione della riflessione

perfetta di un'onda piana sulla superficie infinita $x = 0$.

Per capire in che modo l'apertura delle due componenti influisca sull'andamento della pressione di radiazione, consideriamo 4 differenti angoli di intersezione (o, se si preferisce, 4 angoli di incidenza rispetto alla normale al piano di riflessione) e riportiamo sullo stesso grafico i valori di $P_{rad,n}$ al variare di y ma con n fisso in posizione parallela al suddetto asse; si ottiene quanto mostrato in Fig. 2.

E' evidente come all'aumentare di θ si passi da una condizione di onda stazionaria pura ($\theta = 0$, linea 1) con alternanza di massimi e minimi attorno al valore medio 0 (si veda l'esempio precedente) e periodicità $\frac{\lambda}{2}$, ad un'onda piana ($\theta = \pi/2$, linea 4) con pressione costante e positiva. Gli angoli intermedi dimostrano inoltre come progressivamente sia la periodicità che il valor medio lungo y aumentino, a significare che un piano perpendicolare a x e y risente di una forza complessiva variabile da zero ad un valore massimo dato da W moltiplicato per l'area di incidenza dell'onda.

Conclusioni

È stato mostrato che la pressione di radiazione è ottenibile in modo del tutto generale nell'ambito della teoria lineare dell'acustica a partire dall'equazione di continuità (4) che esprime il principio di conservazione della densità di impulso del campo d'onda. Il legame quantitativo della quantità di moto associata all'onda sonora con l'intensità sonora è dato dall'eq. (6) che, oltre a costituire nella sua essenzialità formale un teorema fondamentale della Meccanica, permette di condurre lo studio del campo sonoro sulla base del formalismo unificato del tensore energia-impulso, già introdotto e impiegato con successo in elettromagnetismo.

Allo scopo di illustrare il concetto della pressione di radiazione e di visualizzare e quantificare l'importanza di questa grandezza anche nei fenomeni tipici dell'ordinaria acustica dell'udibile sono stati riportati i risultati ottenuti sia da simulazioni di alcuni campi modello che da misure indirette condotte all'interno di una canna d'organo. Per quanto il grafico dell'indice ϵ mostri chiaramente che la forza dovuta alla pressione di radiazione è circa centomila volte inferiore a quella dovuta alla pressione acustica, data l'enorme sensibilità dinamica (120 dB) del nostro apparato uditivo, gli effetti della pressione di radiazione potrebbero comunque rivelarsi significativi ad un esame più attento, sia per il meccanismo di eccitazione della membrana timpanica che per la valutazione soggettiva del campo sonoro in termini di *loudness*. Ulteriori indagini saranno svolte in questa direzione.

BIBLIOGRAFIA

1. Lord Rayleigh, *Philos. Mag.* **10**, 364-374 (1905).
2. P. Biquard, *Rev. Acoust.* **1**, 93-109 (1932); **2**, 315-335 (1933).
3. E. Meyer and E.G. Neumann, *Physical and Applied Acoustics*, Ac. Press (1972), pp. 117-118.
4. R.T. Beyer, *J. Acoust. Soc. Am.* **63**(4), 1025-1030 (1978).
5. P.M. Morse and K.U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, Princeton Univ. Press (1968), pp. 248-250.
6. G. Schiffrer and D. Stanzial, *J. Acoust. Soc. Am.* **96**(6), 3645-3653 (1994).
7. L. Brillouin, *Le tenseur en mécanique et en élasticité*, Masson, Paris (1960).